எந்திரவியல்-I

(பட்டப் படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

ஆர். நாகராஜன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,

பௌதிக உதவிப் பேராசிரியர்,

அரசினர் கலைக் கல்லூரி, உதகை.



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—190

எந்திரவியல்-I

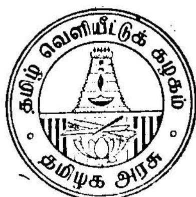
(பட்டப் படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

ஆர். நாகராஜன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,

பௌதிக உதவிப் பேராசிரியர்,

அரசினர் கலைக் கல்லூரி, உதகை.



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—June 1969

MECHANICS

R. NAGARAJAN

Price Rs. 6-25

Printed by
ANURADHA ACCHAGAM,
146, T. H. Road, Madras-21.

அணிந்துரை

(திரு. செ. மாதவன், தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டு கள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப் பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந் துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் மாணவர்க்குக் கலை, அறிவியல் பாடங்களைத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'எந்திரவியல்-I' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் **190**ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **225** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாண வர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னை யின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனங்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

செ. மாதவன்

பொருளடக்கம்

I. இயக்க விசையியல்

முதற்பாகம்

இயக்க விசையியல்

(Dynamics)

I. அளவியல்

(Units and Measurements)

முன்னுரை

மனிதனின் கடந்த காலக் கனவுகள் நனவாகிக்கொண்டுவரும் பொற்காலம் இது. அண்மைக் காலம்வரை நிலாவைத் தொலைவிலிருந்தேகண்டு, அதன் அழகில்மயங்கிவந்த மனிதன், இன்று நிலவின் மிக அருகில் சென்று அதன் தன்மையையும் அதில் மனித வாழ்வுக்கு அடிகோல இயலுமா எனவும் ஆராயத் தலைப்பட்டிருக்கிறான். இயற்கையன்னையின் ஆற்றல்களைத் தெளிவாக ஆராய்ந்தறிந்து, தன் வாழ்வை வளம்பெறச் செய்வதோடு, இயற்கைக் கோள்களுக்கு இணையான செயற்கைக் கோள்களையும் வானத்தே இயக்குகிறான். கடந்த பல ஆண்டுகளில் விஞ்ஞானம் பெற்றுள்ள அளப்பரிய முன்னேற்றமே, இவ் வரிய செயல்களுக்கெல்லாம் காரணமாகும். நிலாப் பயணத்தைச் செவ்வனே முடித்து, வெற்றிகாண உறுதுணைபுரியும் ராக்கெட்டுகளைச் சரியாக இயக்கவும், நம்மைச் சுற்றி, நாம் காணும் பலவித நிலைமப் பொருள்களின் (inert bodies) இயக்கத்தைப்பற்றித் தெளிவாக அறியவும், அத்தகைய இயக்கங்களை நமக்குப் பயனளிக்கும் வகையில் கட்டுப்படுத்தவும் எந்திரவியலைப்பற்றிய நுட்பமான, பிழையரு அறிவு மிகமிக இன்றியமையாததாகும்.

பௌதிகத்தின் ஒரு பிரிவாகிய எந்திரவியல் பொருள்களின் (bodies) இயக்கம், அந்த இயக்கத்திற்குக் காரணமான விசை (force), அவ் விசையினால் பொருள்கள் செய்யக்கூடிய வேலை (work), பொருள்களின் திறன் (power), ஆற்றல் (energy) ஆகிய

வற்றைப்பற்றியும் எந்திரங்களைப் பற்றியும் கூறுகிறது. எந்திர வியலானது இயக்க-விசையியல் (Dynamics), நிலையியல் (Statics), இயங்குபாய் பொருளியல் (Hydro-dynamics), நிலைபாய் பொருளியல் (Hydro statics) என நான்கு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. பொருள்களின் இயக்கத்தைப்பற்றியும் அவ் வியக்கத்திற்குக் காரணமான விசையைப்பற்றியும் கூறுவது, இயக்க-விசையியல்; நிலையான பொருள்களின்மீது செயற்படும் விசைகளைப் பற்றிக் கூறுவது நிலையியல்; இயங்குகின்ற பாய்பொருள்களைப் (fluids) பற்றிக் கூறுவது இயங்குபாய் பொருளியல்; நிலையான பாய்பொருள்களைப்பற்றியது நிலைபாய் பொருளியல். மேற்கூறிய பிரிவுகளுள் ஒன்முன இயக்க - விசையியலானது, இயக்கவியல் (Kinematics), விசையியல் (Kinetics) என மேலும் இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இயக்கவியல் பொருள்களின் இயக்கத்தைப்பற்றியும், விசையியல் பொருள்களின் அவ் வியக்கத்திற்குக் காரணமான விசை, மற்றும் திறன், ஆற்றல் ஆகியவற்றைப் பற்றியும் கூறுகின்றன.

அடிப்படை அலகுகள் (Fundamental Units)

எந்திரவியலில் பல்வேறு ராசிகளின் (quantity) துல்லியமான (accurate) அளவீடுகள் இன்றியமையாதனவாகும். ஒரு ராசியை அளவிடுவதற்கு அந்த ராசியின் ஒரு சிறு பகுதியைப் படித்தர அளவாகக்கொண்டு, அதன் அடிப்படையில் அந்த ராசியின் அளவை அறிகிறோம். அப் படித்தர அளவு அந்த ராசியின் அலகு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருளின் நீளத்தை அளவிட, நீளத்தின் ஒரு சிறு பகுதியைப் படித்தரமாகக்கொண்டு (சென்டி மீட்டர் அல்லது அடி) பொருளின் நீளத்தில் அத்தகைய படித்தரப் பகுதிகள் எத்தனை உள்ளன எனக் கணக்கிடுகிறோம். ஒரு பொருளின் நீளம் 15 செ.மீ. என்னும்போது, நீளத்தின் அலகான சென்டி மீட்டரின் நீளத்தைப்போல், பொருள் 15 மடங்கு நீளத்தைக் கொண்டுள்ளது எனப் பொருள்படும்.

பௌதிகத்தில் இடம்பெறும் பல்வேறு ராசிகளில் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒவ்வோர் அலகைக் கொள்வது என்பது எளிதன்று. ஆழ்ந்த ஆராய்ச்சிகளின் பயனாகப் பல்வேறு பௌதிக ராசிகளை (physical quantities) நீளம், நிறை (mass), காலம் (time) ஆகிய மூன்று ராசிகளின் அடிப்படையில் கூறமுடியும் என அறியப்பட்டது. நீளம், நிறை, காலம் ஆகிய மூன்று ராசிகளும் அடிப்படை ராசிகள் (fundamental quantities) எனவும், ஏனைய ராசிகள் அவற்றின் வழி வந்த ராசிகள் (derived quantities) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. பரப்பளவு, பருமன் (volume), அடர்த்தி, வேகம் போன்றவை வழி

வந்த ராசிகளுக்கான சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். அதற்கேற்ப அடிப்படை அலகுகள், வழிவந்த அலகுகள் என இருவகை அலகுகள் உண்டு.

ராசிகளை அளவிடுவதற்கு இருவகை முறைகள் வழக்கில் உள்ளன. அவையாவன : 1. மெட்ரிக் முறை, 2. பிரிட்டன் முறை. மெட்ரிக் முறையில் நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றின் அலகுகள் முறையே சென்டி மீட்டர், கிராம், விநாடி ஆகியவை யாகும். (அவற்றை முறையே செ.மீ., கி., வி. எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடலாம்.) பிரிட்டன் முறையில் அவற்றின் அலகுகள் முறையே அடி, பவுண்டு, விநாடி ஆகியவையாகும்.

படித்தர அலகுகள் (Standard Units)

இனி, சென்டி மீட்டர், அடி, கிராம், பவுண்டு, விநாடி ஆகியவை எவற்றைக் குறிப்பிடுகின்றன எனக் காண்போம்.

மெட்ரிக் முறையில் நீளத்தின் படித்தர அலகு, மீட்டர் என்பதாகும். மீட்டர் என்பது பாரீசுக்கு அருகில் செவ்ரே (Sevres) என்னுமிடத்தில் 0°C வெப்ப நிலையில் பாதுகாக்கப்படும் பிளாட்டினம்—இரிடியம் உலோகக் கலவையாலான தண்டு ஒன்றில் உள்ள இரு நிலையான குறியீடுகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவாகும். சென்டி மீட்டர் என்பது மீட்டரில் நூறில் ஒரு பகுதியாகும்.

பிரிட்டன் முறையில் நீளத்தின் படித்தர அலகு கெஜம் (yard) என்பதாகும். கெஜம் என்பது இலண்டனில் வர்த்தகக்குழு அலுவலகத்தில் 62°F வெப்ப நிலையில் பாதுகாக்கப்பட்டுவரும் வெண்கலத் தண்டு ஒன்றில் பதிக்கப்பெற்றுள்ள இரு தங்க முளை (gold plug) களில் உள்ள குறியீடுகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு ஆகும். அடி என்பது கெஜத்தில் மூன்றிலொரு பகுதியாகும்.

மெட்ரிக் முறையில் நிறையின் படித்தர அலகு கிலோ கிராம் (kilo gram ஆகும். இது பாரீசுக்கருகில் செவ்ரே என்னுமிடத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பிளாட்டினம்-இரிடியம் உருளையின் நிறையாகும். கிராம் என்பது கிலோகிராமில் ஆயிரத்திலொரு பகுதியாகும்.

பிரிட்டன் முறையில், நிறையின் படித்தர அலகு பவுண்டு என்பதாகும். அது இலண்டனில் வர்த்தகக் குழு அலுவலகத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பிளாட்டினக் கட்டி ஒன்றின் நிறையாகும்.

இருமுறைகளிலும் காலத்தின் படித்தர அலகு சராசரி சூரிய நாள் (Mean solar day) ஆகும். சூரிய நாள் என்பது, சூரியன் வான்

முகட்டை அடுத்தடுத்து இருமுறை கடப்பதற்கிடையேயுள்ள கால அளவாகும். இக் காலஅளவு ஓராண்டு இடைவெளியில் சிறிது சிறிது மாறுபடுகிறது. ஓராண்டுக் காலத்திலுள்ள சூரிய நாட்களின் சராசரி மதிப்பு, சராசரி சூரிய நாள் எனப்படும். சராசரி சூரிய நாளின் $\frac{1}{86400}$ பகுதி ஒரு விநாடி ஆகும்.

இனி, அடிப்படை ராசிகளைத் துல்லியமாக அளவிடுவதைப் பற்றிக் காண்போம்.

நீட்டலளவு (Measurement of length)

வெர்னியர்கள் (Verniers : நீளங்களை அளவிட சென்டி மீட்டர்களாகவும் மில்லிமீட்டர்களாகவும் பிரிக்கப்பட்ட மீட்டர் கோலையோ, அங்குலங்களாகவும், அங்குலங்களை 10 பகுதிக ளாகவும் பிரிக்கப்பட்ட அடிக்கோலையோ பயன்படுத்துகிறோம். மேற்கூறிய அளவுகோல்களைக் கொண்டு நீளங்களை முறையே 1 மி.மீ.-க்கும் 0·1 அங்குலத்திற்கும் திருத்தமாக அளவிடமுடியும். அவற்றைவிடக் குறைந்த நீளங்களை இந்த அளவு கோல்களின் உதவியால் துல்லியமாக அளவிடமுடியாது. மிகக் குறைந்த நீளங்களையும் துல்லியமாக அளவிட, வெர்னியர் கோல் என்னும் துணைக்கோலின் உதவியை நாடுகிறோம். இனி, மீட்டர்கோல், அடிக்கோல் ஆகியவற்றை மூலக்கோல்கள் — (main scales) — என அழைப்போம்.

ஓர் அளவுகோலைக் கொண்டு, துல்லியமாக அளவிடப்படக்கூடிய மிகச்சிறிய நீளம் அந்த அளவுகோலின் மீச் சிற்றளவை (least count) எனப்படும். அது ஒரு மூலக்கோல் பகுதி, ஒரு வெர்னியர் கோல் பகுதி ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டிற்குச் சமமாகும். மூலக்கோல் பகுதி ஒன்றின் எந்தச் சிறு பின்னத்தையும் துல்லிய மாக அளவிடுவதற்கேற்ப, வெர்னியர் கோல்களை அமைத்துக் கொள்ளலாம். வெர்னியர் கோல்களில் இரு வகை உண்டு. அவை யாவன : 1. முன்னோக்கு வெர்னியர் (Forward reading vernier); 2. பின்னோக்கு வெர்னியர் (Backward reading vernier).

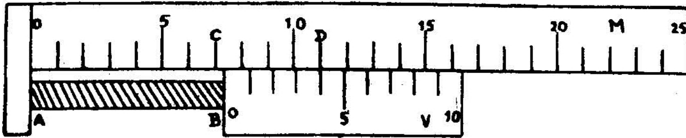
முன்னோக்கு வெர்னியர் : பொதுவாக $\frac{1}{n}$ மூலக்கோல் பகுதியை மீச்சிற்றளவையாகக்கொண்ட ஒரு முன்னோக்கு வெர்னியரை அமைக்க $(n-1)$ மூலக்கோல் பகுதிகளை n பகுதிகளாகப் பிரிக்கவேண்டும். இங்கு வெர்னியரின் மீச்சிற்றளவையாகிய $\frac{1}{n}$

மூலக்கோல் பகுதியானது (மூ. கோ. ப.) ஒரு மூலக்கோல் பகுதி, ஒரு வெர்னியர் கோல் பகுதி (வெ. கோ. ப.) ஆகியவற்றிற்கிடையே யுள்ள வேறுபாட்டிற்குச் சமம் என்பதைக் காணலாம். அதாவது,

$$\text{மீச்சிற்றளவை(மீ.அ.)} = 1 \text{ மூ. கோ. ப.} - 1 \text{ வெ. கோ. ப.}$$
$$= 1 \text{ மூ. கோ. ப.} - \frac{n-1}{n} \text{ மூ. கோ. ப.}$$
$$= \frac{1}{n} \text{ மூ. கோ. ப.}$$

முன்னோக்கு வெர்னியரில் வெர்னியர் கோல், மூலக்கோல் ஆகிய இரண்டிலும் ஒரே திசையில் அதாவது, இடமிருந்து வலமாக அளவுக் கூறுகள் இலக்கமிடப்பட்டிருக்கும். மேலும், வெர்னியர் கோல் பகுதிகள், மூலக்கோல் பகுதிகளைவிடச் சிறியனவாக இருக்கும்.

முன்னோக்கு வெர்னியரைப் பயன்படுத்தி நீளங்களை எவ்வாறு அளவிடலாம் என்று இப்போது காண்போம். எடுத்துக்காட்டாக, 9 மூலக்கோல் பகுதிகளை 10 பகுதிகளாகப் பிரித்து அமைக்கப்பட்ட வெர்னியர்கோலை எடுத்துக்கொள்வோம். இத்தகைய வெர்னியர் கோலின் மீச்சிற்றளவை $\frac{1}{10}$ மூ. கோ. ப ஆகும். படம் 1·1 முன்



படம் 1·1

னோக்கு வெர்னியரின் உதவியால் ஒரு பொருளின் நீளம் அளக்கப்படு வதை விளக்குகிறது. படம் 1·1-ல் AB என்பது பொருள்; M என்பது மூலக்கோல்; V என்பது வெர்னியர் கோலாகும். பொருள் அதன் A முனை மூலக்கோலின் சுழியுடன் பொருந்துமாறு வைக்கப் பட்டுள்ளது. வெர்னியர் கோலானது அதன் சுழிமுனைப் பொருளின் B முனையுடன் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. இனி, வெர்னியர் கோலின் சுழிமுனைக்கு நேராக மூலக்கோலில் உள்ள அளவீடு, பொருளின் நீளத்தைக் கொடுக்கும். படத்தில் வெர்னியர் கோலின் சுழிமுனை மூலக்கோலின் 7ஆவது 8ஆவது பகுதிகளுக் கிடையே அமைந்துள்ளது. எனவே, பொருளின் நீளம் 7 மூ.கோ.ப. +CB ஆகும். CB-ன் மதிப்பைக்காண வெர்னியர் கோலை ஆராய்ந்து, மூலக்கோல் பகுதி ஒன்றுடன் இணைந்திருக்கும் வெர்னியர்கோல்

பகுதியைக் காணவேண்டும். படத்தில் 4ஆவது வெ. கோ. ப. மூலக் கோல் பகுதி ஒன்றுடன் இணைந்திருப்பதைக் காணலாம். இனி,

CB = CD − BD
= 4 மூ. கோ. ப.—4 வெ. கோ. ப.
= 4 (1 மூ. கோ. ப.—1 வெ. கோ. ப.)
= 4 × மீச் சிற்றளவை

எனவே, பொருளின் நீளம்

AB = 7 மூ. கோ. ப. + 4 × மீ. அ.
= 7 மூ. கோ. ப. + 4 × $\frac{1}{10}$ மூ. கோ. ப.
= 7·4 மூ. கோ. ப.

மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் 4 என்பது மூ. கோ. ப. ஒன்றுடன் இணையும் வெர்னியர் கோல் பகுதியைக் குறிக்கிறது. அதனை வெர்னியர் கோல் அளவீடு (வெ. கோ. அ.) என அழைக்கலாம். 7 என்பது மூலக்கோலிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. அது மூலக் கோலளவீடு (மூ. கோ. அ.) என அழைக்கப்படுகிறது.

ஆகவே, பொதுவாகக் குறிப்பிடின்,

பொருளின் நீளம் = மூ. கோ. அ. + (வெ. கோ. அ. × மீ. அ.)

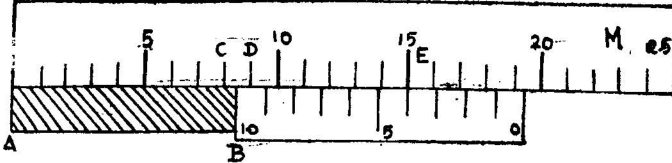
பின்னோக்கு வெர்னியர்: பொதுவாக $\frac{1}{n}$ மூ. கோ. ப. மீச்சிற்றளவையைக்கொண்ட பின்னோக்கு வெர்னியர் ஒன்றை அமைக்க (n + 1) மூ. கோ. ப. n பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படும். இங்கு வெர்னியரின் மீச்சிற்றளவையாகிய $\frac{1}{n}$ மூ. கோ. பகுதியானது, ஒரு வெ. கோ. ப. ஒரு மூ. கோ. ப. ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டிற்குச் சமம் என்பதைக் காணலாம். அதாவது,

அதம அளவை = 1 வெ. கோ. ப — 1 மூ. கோ. ப.
= $\frac{n+1}{n}$ மூ. கோ. ப — 1 மூ. கோ. ப.
= $\frac{1}{n}$ மூ. கோ. ப.

பின்னோக்கு வெர்னியரில் அளவுக் கூறுகள் வலமிருந்து இடமாக இலக்கமிடப்பட்டிருக்கும். மேலும், வெர்னியர் கோல் பகுதிகள் மூலக்கோல் பகுதிகளைவிடப் பெரியனவாக இருக்கும்.

இனி, பின்னோக்கு வெர்னியரின் உதவிகொண்டு பொருள்களின் நீளங்களை எவ்வாறு அளவிடலாம் எனக் காண்போம். எடுத்துக்

காட்டாக, 11 மூ. கோ. பகுதிகள் 10 பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட பின்னுக்கு வெர்னியர் ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம். அத்தகைய வெர்னியரின் மீச்சிற்றளவை $\frac{1}{10}$ மூ. கோ. ப. ஆகும்.



படம் 1·2

படம் 1·2-ல் AB என்பது பொருள்; M என்பது மூலக்கோல்; V என்பது வெர்னியர் கோல். பொருளின் A முனை மூலக்கோல் சுழியுடனும், வெர்னியர் கோலின் 10ஆவது பகுதி பொருளின் B முனையுடனும் இணைந்திருக்கின்றன. படத்தில், பொருளின் நீளம்,

$AB = AC + CB$

ஆனால், AC = 8 மூ. கோ. பகுதிகள். CB-ன் மதிப்பைக் காண, வெர்னியர் கோலில் மூலக்கோல் பகுதி ஒன்றுடன் இணைந்திருக்கும் பகுதியைக் காணவேண்டும். படத்தில் 4ஆவது பகுதி இணைந்திருப்பதைக் காணலாம். இனி,

CB = CD − BD

ஆனால், CD = 1 மூ. கோ. ப.

BD = BE − DE

= 6 வெ. கோ. ப. − 6 மூ. கோ. ப.

= 6 (1 வெ. கோ. ப. − 1 மூ. கோ. ப.)

= 6 × மீச்சிற்றளவை

= 6 × $\frac{1}{10}$ மூ. கோ. ப.

= 0·6 மூ. கோ. ப.

∴ CB = CD − BD

− மூ. கோ. ப. − 0·6 மூ. கோ.ப.

= 0·4 மூ. கோ.ப.

= 4 × $\frac{1}{10}$ மூ. கோ. ப.

எனவே, பொருளின் நீளம்

AB 8 மூ. கோ. ப. + 4 × $\frac{1}{10}$ மூ. கோ. ப.

= 8·4 மூ. கோ. ப.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் 4 என்பது வெர்னியர் கோலிலிருந்தும்

8 என்பது மூலக்கோலிலிருந்தும் கணக்கிடப்படுவதால், அவை முறையே வெர்னியர் கோலளவீடு, மூலக்கோலளவீடு என அழைக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, பொதுவாகக் குறிப்பிடின்,

பொருளின் நீளம் = மூ. கோ. அ. + (வெ. கோ. அ. × மீ. அ.)

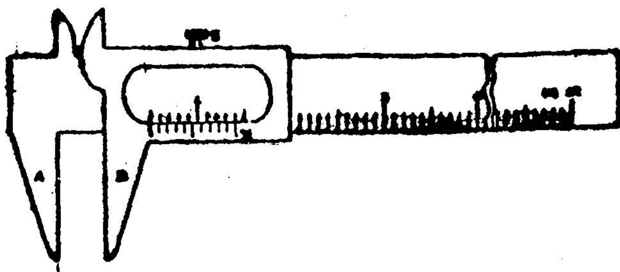
வட்ட வெர்னியர்கள் (Circular Verniers): இவை கோணங்களை நுட்பமாக அளவிடப் பாகைமானிகளுடன் (protractors) பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இங்கு, பாகைமானி மூலக்கோலாகப் பயன்படுகிறது. இத்தகைய வெர்னியர்களை, நிற மாலைமானி (spectrometer) களில் காணலாம். நிற மாலைமானிகளில் உள்ள வட்ட அளவுகோல் (மூலக்கோல்) பொதுவாக $\frac{1}{2}$ பாகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். அத்தகைய 29 மூ. கோ. பகுதிகள் 30 பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு, வெர்னியர்கோல் அமைக்கப்பட்டிருக்கும். எனவே,

மீச்சிற்றளவை = 1 மூ. கோ. ப. − 1 வெ. கோ. ப.
= 1 மூ. கோ. ப. − $\frac{29}{30}$ மூ. கோ. ப.
= $\frac{1}{30}$ மூ. கோ. ப.

ஆனால், 1 மூ. கோ. ப. = $\frac{1}{2}^\circ$

∴ மீச்சிற்றளவை = $\frac{1}{30} \times \frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{60}^\circ = 1'$
= ஒரு கலை (minute)

வெர்னியர் காலிப்பர் (Vernier Calipers : இது முன்னேக்கு வெர்னியரை அடிப்படையாகக்கொண்டது. இதன் உதவியால்



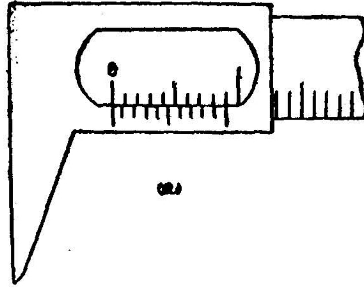
A, B — உலோகக் கரங்கள்
M — மூலக்கோல்
V — வெர்னியர் கோல்
S — திருகாணி

பொருள்களின் பரிமாணங்களை எளிதில் துல்லியமாக அளக்கலாம்.

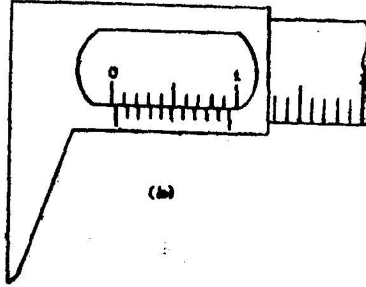
படம் 1·3

படம் 1·3-ல் வெர்னியரின் அமைப்பைக் காணலாம். படத்தில் M என்பது ஓர் உலோகக் கோல். அதன் ஒரு விளிம்பு சென்டி மீட்டர் மற்றும் மில்லி மீட்டர்களாகவும் மற்ற விளிம்பு அங்குலங்களாகவும் அங்குலத்தின் பகுதிகளாகவும் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவை முறையே மெட்ரிக், பிரிட்டன் முறைகளில் மூலக்கோல்களாகச் செயற்படுகின்றன. இக் கோலின் இட முனையில் செங்கோணத்தில் கெட்டியாகப் பொருத்தப்பட்ட A என்ற உலோகக் கரம் உள்ளது. B என்பது மற்றொரு கரம்; இது உலோகக்கோலின் மேல் நகரக்கூடியதாயுள்ளது. இதனை S என்ற ஒரு திருகாணியின் மூலம் எந்த இடத்திலும் அசையாமல் பொருத்திக்கொள்ளலாம். இக் கரம் மெட்ரிக், பிரிட்டன் முறைகளுக்கான வெர்னியர்களையும் தாங்கியுள்ளது. AB ஆகிய கரங்களின் ஒன்றையொன்று நோக்கும் கரங்கள் சமதளங்களாக அமைந்துள்ளன. இவ் விரு தளங்களும் ஒன்றையொன்றுதொட்டுக்கொள்ளும்போது, மூலக்கோலின் சுழியும் வெர்னியர் கோலின் சுழியும் ஒன்றியிருக்கும்வண்ணம் இவ் விரு கோல்களிலும் அளவுக் கூறுகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவ்வாறு இரு சுழிகளும் ஒன்றியிராவிடில், கருவியில் தொடக்கப் பிழை (zero error) இருப்பதாகக் கொள்ளவேண்டும். A,B ஆகிய இரு கரங்களைத் தவிர, C,D என்ற இருகரங்களும் படத்தில் உள்ளது போல் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இவை ஒரு குழாயின் உள்விட்டத்தை அளவிடப் பயன்படுகின்றன. A,B ஆகிய கரங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும்போது, C, D ஆகியவற்றின் சமதளங்களும் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொள்ளும்.

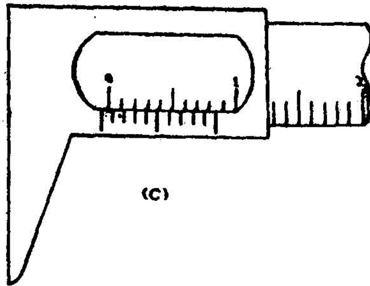
வெர்னியர்காலிப்பரைக்கொண்டு ஓர் உருளையின் நீளத்தை அளவிடல் : சோதனையைத் தொடங்குமுன் வெர்னியர் காலிப்பரை ஆராய்ந்து அதன் மீச்சிற்றளவை, தொடக்கப் பிழை ஆகியவற்றைக் கணக்கிடவேண்டும். தொடக்கப் பிழை ஏதுமிருப்பின் அதற்கான தொடக்கத் திருத்தத்தைக் (zero correction) கணக்கிட்டு நாம் காணும் ஒவ்வோர் அளவுடனும் கூட்டிக்கொள்ள வேண்டும். தொடக்கப் பிழையைக் காண A, B ஆகிய இரு கரங்களையும் ஒன்றையொன்று தொடும்படி வைக்கவேண்டும். இப்போது, வெர்னியர் கோல் சுழி, மூலக்கோல் சுழியுடன் ஒன்றியிருப்பின் தொடக்கப்பிழை இல்லை. (படம் 1·4) அன்றி வெர்னியர் கோலின் சுழி மூலக்கோலின் சுழிக்கு முன் இருப்பின் தொடக்கப் பிழையை நேர் குறியுடையதாகக் கொள்ளவேண்டும். மேலும், வெர்னியர் கோலில் x ஆவது பகுதி மூலக்கோல் பகுதி ஒன்றுடன் ஒன்றியிருப்பின், தொடக்கப் பிழை $+(x \times$ மீ.அ.$)$ ஆகும். படம் 1·4b-ல் தொடக்கப்பிழை $= + (4 \times$ மீ.அ.$)$ மாறாக வெர்னியர்சுழியானது, மூலக்கோல்சுழிக்குப்பின் அமைந்து வெர்னியரில் x ஆவது



தொடக்கப் பிழை = 0
தொடக்கத் திருத்தம் = 0



தொடக்கப் பிழை = + (4 × அ.அ.)
தொடக்கத் திருத்தம் = − (4 × அ.அ.)



தொடக்கப் பிழை = − [(10 − 3) × அ.அ.]
தொடக்கத் திருத்தம் = + [7 × அ.அ.]

படம் 1·4

பகுதி மூலக்கோல் பகுதி ஒன்றுடன் ஒன்றியிருப்பதாகக் கொள் வோம். இப்போது, வெர்னியரில் மொத்தப் பகுதிகள் n எனில்

தொடக்கப் பிழை – [(n—x) × மீ.அ.] ஆகும். படம் 1·4 C-ல் தொடக்கப்பிழை = –[(10 – 3) × மீ.அ.] தொடக்கப் பிழை நேர்க்குறியுடையதாயின், தொடக்கத் திருத்தம் எதிர்க் குறியுடையதாயும், பிழை எதிர்க்குறியுடைய தாயின் திருத்தம் நேர் குறியுடையதாயும் அமையும்.

வெர்னியர் காலிப்பரின் மீச்சிற்றளவையையும் தொடக்கத் திருத்தத்தையும் அறிந்தபின், உருளையை நீளவாக்கில் A, B ஆகிய கரங்களுக்கிடையே மென்மையாகப் பற்றவேண்டும். இப்போது மூலக்கோலளவீட்டையும் (வெர்னியர் சுழிக்கு இடப்புறம் உள்ள மூலக் கோல் பகுதியின் மதிப்பு வெர்னியர் கோலளவீட்டையும் (மூலக்கோல் பகுதி ஒன்றுடன் ஒன்றியிருக்கும் வெர்னியர் பகுதியின் மதிப்பு) காணவேண்டும். இனி,

உருளையின் நீளம் = மூ.கோ.அ. + (வெ.கோ.அ × மீ.அ.) + தொடக்கத் திருத்தம்:

உருளையை வெவ்வேறு விதமாகப்பற்றி, நீளங்களை அளந்து சராசரி நீளத்தைக் கணக்கிட்டுக்கொள்ளலாம்.

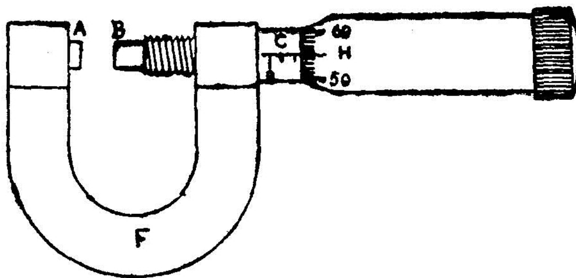
திருகு அளவி (Screw Gauge)

இது திருகாணியின் தத்துவத்தை அடிப்படையாக்கொண்டது. இதன் உதவியால் மெல்லிய கண்ணாடித் தகடு, மெல்லிய கம்பிபோன்ற சிறிய பொருள்களின் பரிமாணங்களை மிக நுட்பமாகக் காணலாம்.

திருகாணியின் தத்துவம் : மரையின் வழியே செலுத்தப்பட்ட சீரான திருகாணி ஒன்றை ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றினால் திருகாணியின் முனை எப்பொழுதும் ஒரு குறிப்பிட்ட தூரம் நகரும். அக் குறிப்பிட்ட தூரம் புரியிடைத் தூரம் (pitch) எனப்படும். அது திருகின் அச்சுக்கு இணையாக அடுத்தடுத்த இரு புரிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்திற்கும் சமமாகும்.

திருகு அளவியின் அமைப்பைப் படம் 1·5-ல் காணலாம். படத்தில் F என்பது ஒரு U வடிவ உலோகச் சட்டம். அதன் ஒரு முனையில் உள்ளீட்ட குழாய் C ஒன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இக் குழாயின் அச்சுக்கிணையாக, அதன்மீது காணப்படும் அளவுக் கூறுகள் புரிக்கோலின் (pitch scale) பகுதிகளாகும். பொதுவாக இக் கோல் மில்லி மீட்டர்களாகவோ, அரை மில்லி மீட்டர்களாகவோ பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். உள்ளீடற்ற குழாயின் உட்சுவரில் அமைந்துள்ள திருகு மரையின் வழியே ஒரு திருகாணி இயங்கு

கிறது. இத் திருகாணியின் ஒரு முனை (B) சமதளமாய் அமைந்து, மறுமுனை (உச்சிமுனை) சரிவாகச் செய்யப்பட்ட விளிம்பினையுடைய மற்றோர் உள்ளீடற்ற குழாயுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இக் குழாய் முதலில் கூறப்பட்ட குழாயின்மீது செருகப்பட்ட நிலையில் உள்ளது. இதன் சரிவாக வெட்டப்பட்ட விளிம்பு, பொதுவாக 100 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். இது தலைக்கோல் (head scale) என அழைக்கப்படுகிறது. தலைக்கோலைச் சுழற்றுவதன்மூலம் திருகாணியைச் சுழற்றலாம். தலைக்கோலும் திருகாணியோடு அதன் அச்சுக்கிணையாகப் புரிக்கோலின்மீது நகரும். திருகாணியின் சமதள முனைக்கு எதிராக U வடிவச் சட்டத்தின் மறுமுனையில் சமதளத்தைக் கொண்ட உலோகக் குமிழ் (A) ஒன்று அமைந்துள்ளது. A,B



F — *U* வடிவ உலோகச் சட்டம்
A, B — சமதளங்கள்
C — உள்ளீடற்ற குழாயும் புரியளவுகோலும்
H — தலைக்கோல்

படம் 1·5

ஆகிய தளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும்போது, தலைக்கோலின் சுழியும் புரிக்கோலின் சுழியும் ஒன்றுமாறு—அதாவது தலைக்கோலின் விளிம்பு புரிக்கோலின் சுழியைத் தொட்டவாறும் தலைக்கோலின் சுழிக்கோடு ஆதாரக் கோட்டுடன் (lease line—திருகாணியின் அச்சுக்கிணையாய்அமைந்த நீண்ட கோடு) ஒன்றியும் இருக்குமாறு—அக் கோல்களின் அளவுக் கூறுகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவ்வாறு ஒன்றியிராவிடில் கருவியில் தொடக்கப்பிழை உள்ளதாகக் கருதவேண்டும். திருகாணி தேவைக்கு அதிமாகத் திருகப்படுவதைத் தடுக்க அதன் உச்சிமுனையில் ஒருவழித் தடையமைவு (ratchet ஒன்று உள்ளது.

திருகு அளவியின் உதவியால் மெல்லிய கம்பியின் விட்டத்தைக் காணல் : முதலில் திருகு அளவியை நன்கு ஆராய்ந்து அதன்

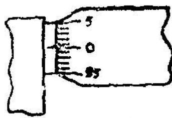
புரியிடைத் தூரம், மீச்சிற்றளவை, தொடக்கப் பிழை ஆகியவற்றைக் காணவேண்டும்.

புரியிடைத் தூரம்: தலைக்கோலின் சுழி, புரிக்கோலின் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியுடன் இணையுமாறு அமைக்கவேண்டும். பின்னர்த் தலைக்கோலை 10 முழுச்சுற்றுகள் சுற்றியபின், அது புரிக்கோலில் நகர்ந்த தூரத்தைக் காணவேண்டும். இத் தூரத்தைப் பத்தால் வகுக்கப் புரியிடைத் தூரம் கிடைக்கும்.

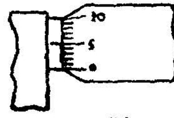
மீச்சிற்றளவை : திருகு அளவியின் மீச்சிற்றளவை என்பது, தலைக்கோலை அதில் ஒருபகுதி சுற்றும்பொழுது திருகாணி நகரும் தூரமாகும். இதுவே, புரியிடைத் தூரத்தைத் தலைக்கோலின் மொத்தப் பகுதிகளால் வகுப்பதால் கிடைக்கும். அதாவது,

$$\text{மீச்சிற்றளவை} = \frac{\text{புரியிடைத் தூரம்}}{\text{தலைக்கோலிலுள்ள மொத்தப் பகுதிகள்}}$$

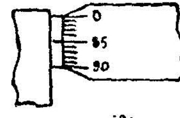
தொடக்கப் பிழை : தொடக்கப் பிழையைக் காண A, B தளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமாறு திருகவேண்டும். இப்போது தலைக்கோல் சுழியும் புரிக்கோல் சுழியும் இணைந்திருக்க வேண்டும். படம் 1·5 a) அவ்வாறுயின் தொடக்கப் பிழை இல்லை. அவ்வாறு



(a)
தொடக்கத் திருத்தம் = 0



(b)
தொடக்கத்திருத்தம் = − 5 × அ.அ.



(c)
தொடக்கத்திருத்தம் = + (100 − 95) × அ.அ. = + 5 × அ.அ.

படம் 1·5

அன்றித் தலைக்கோல் சுழி புரிக்கோல் சுழியுடன் இணையுமுன்பே A,B தளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமாயின் (படம் 1·6 b) தொடக்கப் பிழையை நேர்க்குறியுடையதாகக் கொள்ளவேண்டும். மேலும், தலைக்கோலில் x ஆவது பகுதி புரிக்கோலின் சுழியுடன் ஒன்றியிருப்பின் தொடக்கப் பிழை + (x × மீ.அ.) ஆகும். படம் 1·5b-ல் தொடக்கப் பிழை = + (5 × மீ.அ.). மாறாக A, B தளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமுன்பு தலைக்கோல் சுழியானது, புரிக்கோல் சுழியுடன் ஒன்றுமாயின், தொடக்கப் பிழை எதிர்க் குறியுடையதாகும். இப்போது, A,B தளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும்போது

தலைக் கோலில் x ஆவது பகுதி புரிக்கோல் சுழியுடன் ஒன்றுவதாகக் கொள்வோம். தலைக்கோலில் உள்ள மொத்தப் பகுதிகள் n எனில், இங்குத் தொடக்கப் பிழை —[(n-x) × மீ.அ] ஆகும். படம் 1·6 c-ல் தொடக்கப் பிழை = —(100-95) + மீ.அ. தொடக்கப் பிழை நேர்குறி யுடையதாயின், தொடக்கத் திருத்தம் எதிர்க்குறி உடையதாகும்; பிழை எதிர்க்குறியுடையதாயின், திருத்தம் நேர் குறியுடையதாகும். கருவியில் தொடக்கப் பிழை இருப்பின், கருவி பதிவுசெய்யும் அளவுடன் தொடக்கத் திருத்தத்தைக் கூட்டிக்கொள்ள வேண்டும்.

இனி, A, B தளங்களுக்கிடையே போதுமான இடைவெளி இருக்குமாறு திருகாணியைத் திருகவேண்டும். இரு தளங்களுக்கு இடையே மெல்லிய கம்பியை வைத்துத் திருகாணியைத் திருகி, அதனை மென்மையாகப் பற்றவேண்டும். இப்போது புரிக்கோல் அளவீட்டையும் பு. கோ. அ.—இது புரிக்கோலில் தெரியும் முழுப் பகுதிகளாகும். தலைக் கோலளவீட்டையும் (த. கோ. அ.—இது தலைக் கோலில், புரிக்கோலின் ஆதாரக் கோட்டிற்கு நேராக உள்ள அளவீடு ஆகும்) காணவேண்டும். இனி,

கம்பியின் விட்டம் = பு. கோ. அ. + (த. கோ. அ. × மீ. அ.) + தொடக்கத் திருத்தம்.

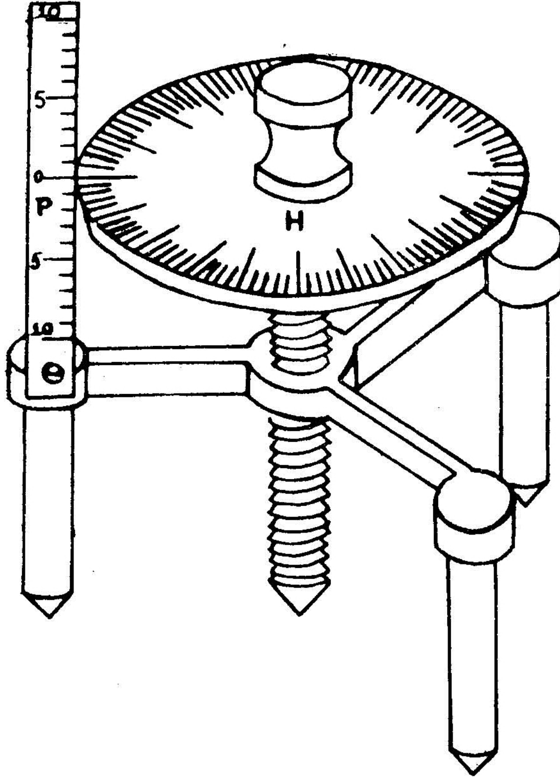
கம்பியை அதே இடத்தில் வேறு திசையில் பற்றியும், வேறு இடங்களில் பற்றியும் அதன் விட்டத்தைக் கணக்கிட்டு, அதன் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக்கொள்ளவேண்டும்.

கோளமானி (Spherometer)

இதுவும் திருகின் தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டதே. இதன் உதவியால் மெல்லிய கண்ணாடித் தகட்டின் தடிப்பைக் காணலாம். குறிப்பாகக் கோளகப் பரப்புகளின் வளைவு ஆரத்தைக் காணலாம்.

இதில் முக்கவை உலோகச் சட்டம் ஒன்று மூன்று கூர்மையான கால்களின்மீது பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இம் மூன்று கால்களும் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் மூன்று மூலைகளில் அமைகின்றன. (படம் 1·7) சட்டத்தின் நடுவேயுள்ள திருகுமறையின் வழியே கீழ்முனை கூராக உள்ள ஒரு திருகாணி இயங்குகிறது. அதன்மேல் முனையில் வட்டமான தட்டு (H) ஒன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இத் தட்டின் விளிம்பு 100 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. இது தலைக்கோல் என அழைக்கப்படுகிறது. மில்லிமீட்டர்களாகப்

பிரிக்கப்பட்ட மற்ருெரு கோல் (P) கால்கள் ஒன்றில், தலைக் கோலின் விளிம்பைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறு செங்குத்தாகப் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. இது புரிக்கோல் என அழைக்கப்படும். திருகாணியின் கூர்முனை கால்களின் கூர்முனைகள் அமைந்திருக்கும் அதே தளத்தில் அமையும்போது, தலைக்கோல் சுழி புரிக்கோல் சுழி



படம் 1·7

யுடன் ஒன்றியிருக்குமாறு இக் கருவி அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, புரிக்கோலின் சுழி அதன் நடுவேயமைந்து அளவுக் கூறுகள் மேல்நோக்கியும் கீழ்நோக்கியும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

கண்ணுடித் தகட்டின் தடிப்பை அளவிடல்: முதலில் கருவியினை நன்கு ஆராய்ந்து, புரியிடைத்தூரம், மீச்சிற்றளவை, தொடக்க அளவீடு ஆகியவற்றைக் காணவேண்டும். புரியிடைத் தூரத்தையும் மீச்சிற்றளவையையும் திருகு அளவியிலுள்ளதுபோலவே காணலாம்.

தொடக்க அளவீடு என்பது திருகாணியின் கூர்முனையும் கால்களின் கூர்முனைகளும் ஒரே தளத்தில் இருக்கும்போது, கருவி பதிவு செய்யும் அளவீடு ஆகும். இதற்குக் கோளமானியை ஒரு சமதளக் கண்ணாடித் தகட்டின்மீது வைத்துத் திருகாணியை அதன் கூர்முனை கண்ணாடித் தகட்டைச் சற்றே தொடுமாறு திருகவேண்டும். இது ஒரு நுண்ணிய சீரமைவாகும். திருகாணியை மேல்நோக்கித் திருகியபின், கண்ணைக் கண்ணாடித் தகட்டின் பரப்புக்கு இணையாக வைத்துக்கொண்டு, அதில் தெரியும் திருகுமுனையின் பிம்பமும் திருகுமுனையும் ஒன்றையொன்று சற்றே தொடும்படி திருகாணியை மெதுவாகக் கீழ்நோக்கித் திருகவேண்டும். திருகாணி தேவைக்கு மேல் சிறிதேனும் திருகப்பட்டிருப்பின், கோளமானியின் கால்களிலொன்றைச் சற்று அசைக்கும்போது கருவி திருகாணியின் அச்சை அச்சாகக் கொண்டு சுழலும். இது சீரமைவைச் சரிபார்ப்பதற்கான சோதனையாகும். இப்போது புரிக்கோலில் தலைக்கோலுக்குக் கீழே உள்ள முழுப்பகுதியைப் புரிக்கோலளவீடாகவும் (பு. கோ. அ.) தலைக்கோலில் புரிக்கோலுக்கு நேரேயுள்ள பகுதியினைத் தலைக் கோலளவீடாகவும் த.கோ.அ.) குறித்துக்கொள்ளவேண்டும். புரிக் கோலில் சுழியானது, கோலின் நடுவேயமைந்து அளவுக்கூறுகள் மேல் நோக்கியும் கீழ்நோக்கியும் குறிக்கப்பட்டிருப்பினும் சுழி கோலின் கீழ்முனையில் இருப்பதாகவும், அளவுக்கூறுகள் மேல் நோக்கிக் குறிக்கப்பட்டிருப்பதாகவும் கொண்டால் காட்சிப் பதிவுகளை எளிதாக்கலாம்.) பின்னர்த் தொடக்க அளவீடு (R_o) = பு. கோ. அ. + (த. கோ. அ. × மீ. அ.)

இச் சோதனையைத் தகட்டின்மீது இரண்டு மூன்று இடங்களில் செய்து R_o-ன் சராசரி மதிப்பை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

இனி, திருகாணியை மேல்நோக்கித் திருகியபின் சோதனைக்கு எடுத்துக்கொண்ட கண்ணாடித் தகட்டைத் திருகாணிக்குக்கீழ் மட்டும் இருக்கும்படி வைத்துத் திருகாணியின் கூர்முனை தகட்டின் மேற்பரப்பைச் சற்றே தொடும்படி அதைத் திருகவேண்டும். பின்னர் புரிக்கோல் அளவீட்டையும் தலைக்கோல் அளவீட்டையும் கண்டு கருவி பதிவுசெய்யும் மொத்த அளவீட்டை (R) யும் கணக்கிட வேண்டும். திருகாணியின் கூர்முனை சோதனைத் தகட்டில் வெவ் வேறு இடங்களைத் தொடுமாறு வைத்துச் சோதனையைச் செய்து R-ன் சராசரி மதிப்பை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். R, R_o ஆகிய வற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு சோதனைத் தகட்டின் தடிப்பைக் கொடுக்கும்.

கோளகப் பரப்பின் வளைவு ஆரத்தைக் காணல் : எடுத்துக் காட்டாகக் குவிதளம் ஒன்றன் வளைவு ஆரத்தைக் காணவேண்டியிருப்பதாகக் கொள்வோம். முதலில் மேற்கூறியதுபோல் தொடக்க

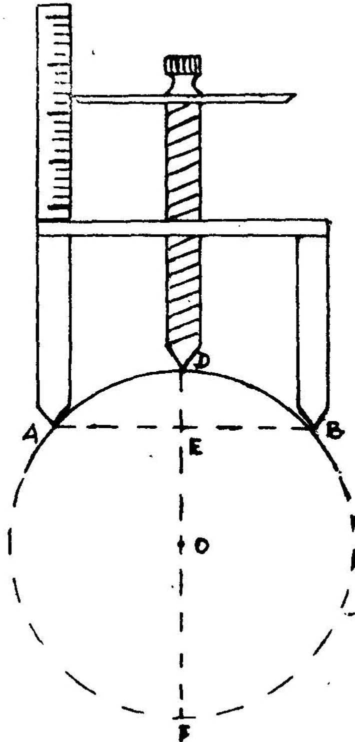
அளவீட்டைக் (R_0) கணக்கிட்டுக்கொள்ளவேண்டும். அடுத்துத் திருகைப் போதிய அளவுக்கு மேலே தூக்கியபின், கோளமானியைக் குவிதளத்தின்மீது வைத்துத் திருகாணியின் முனை குவிதளத்தைச் சற்றே தொடுமாறு திருகாணியைத் திருகவேண்டும். பின்னர்ப் புரிக் கோலளவீட்டையும் தலைக்கோலளவீட்டையும் கண்டு, கருவி பதிவு செய்யும் மொத்த அளவீட்டைக் (R_1) கணக்கிடவேண்டும். சோதனையைத் திருப்பிச் செய்து, R_1-ன் சராசரி மதிப்பைக் காண வேண்டும். R_1, R_0 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டை h எனக் கொள்வோம்.

பின்னர், கோளமானியை ஒரு காகிதத்தின்மீது வைத்து அதன் கால்கள், திருகு ஆகியவற்றின் கூர்முனைகளின் அடையாளங்கள் காகிதத்தில் ஏற்படுமாறு அழுத்தி இரு கால்களுக்கிடையேயுள்ள சராசரித் தொலைவையும் (l) ஒரு காலுக்கும் திருகாணிக்குமிடையே யுள்ள சராசரித் தொலைவை (a) யும் கணக்கிடவேண்டும். இனி, குவிதளத்தின் வளைவு ஆரம் R எனின், R-ன் மதிப்பை,

$$R = \frac{}{bh} + \frac{}{2}$$

அல்லது $R = \frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2}$

என்ற வாய்பாடுகளிலிருந்து கணக்கிடலாம்.



படம் 1·8

மேற்கூறிய வாய்பாடுகளைப் பின்வருமாறு பெறலாம். படம் 1·8-ல் உள்ள வட்டம் நாம் எடுத்துக்கொண்ட குவிதளம் ஒரு பகுதியாக அமைந்த கோளத்தின் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துத் தள வெட்டுமுகமாகும். O என்பது கோளத்தின் மையம். AB என்பது கோளமானியின் கால்களின் கூர்முனைகள் அமைந்த கிடைத்தளம். திருகாணியின் அச்சானது AB-ல் E வழியேயும் O வழியேயும் செல்லும். படத்தில் DE = h ; DO = R ; AE = BE = a

இனி, வடிவியலின்படி

$$DE \times EF = AE^2$$

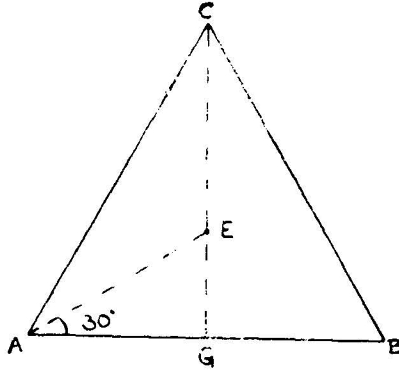
அதாவது $h(2R - R) = a^2$

$$2Rh - h^2 = a^2$$

அல்லது $2Rh = a^2 + h^2$

எனவே, $R = \frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2}$ 1.1

அடுத்து, படம் 1·9-ல் A, B, C ஆகியவை கோளமானிக் கால்களின் அடையாளங்களையும், E திருகாணியின் அடையாளத்தையும் குறிக்கின்றன. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணமாதலாலும்,



படம் 1·9

A, B, C ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து E சமதொலைவில் இருப்பதாலும் C-லிருந்து E வழியே வரையப்படும் கோடு AB-க்கு நேர்க்குத்தாக அமையும். மேலும் $\angle GAE = 30°$; $AE = a$; $AG = \frac{1}{2}$.

BAG என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$AG = \frac{1}{2} = AE \cos 30 = a. \frac{\sqrt{3}}{2}$$

அதாவது, $\frac{1}{2} = a. \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a-ன் இம் மதிப்பை சமன் 1·1-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

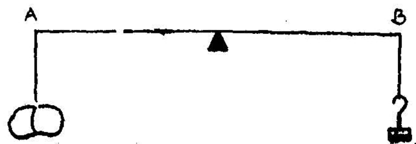
$$R = \frac{1^2}{6h} + \frac{h}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 1{\cdot}2$$

பின் தொய்வு (Back lash): திருகு அளவி, கோளமானி ஆகிய இரண்டிலும் (பொதுவாக, திருகாணியின் தத்துவத்தில் செயற்படும் எக் கருவியிலும் மரையில் உள்ள திருகுப் புரிகளோடு திருகாணியின் புரிகள் நன்ருகப் பொருந்தாமல் சிறிது இடைவெளி இருப்பின், திருகாணியை ஒரு திசையில் சுற்றிவிட்டுப் பின்னர் எதிர்த் திசையில் சுற்றும்பொழுது, திருகாணியின் முனை நகரத் தொடங்குமுன் திருகாணியின் தலை, எனவே தலைக்கோல் ஓரளவுக்கு நகரும். இதனைப் பின் தொய்வு என்கிருேம். ஓர் அளவீட்டைப் பதிவு செய்யுமுன், திருகை முன்னும் பின்னும் நகர்த்தாமல் ஒரே திசையில் நகர்த்துவதன்மூலம் பின் தொய்விஞல் ஏற்படும் பிழையைத் தவிர்க்கலாம்.

நிறுத்தலளவு (Measurement of mass)

நிறுத்தலளவைபற்றி அறியத் தொடங்குமுன் பௌதிகத்தில் மாறிமாறிப் பயன்படும் நிறை, எடை (weight) என்ற இரு சொற்களைப்பற்றித் தெளிவாகத் தெரிந்துகொள்வது நல்லது. ஒரு பொருளின் நிறை என்பது அப் பொருளில் அடங்கியுள்ள பருப்பொருளின் (matter) அளவைக் குறிக்கும். பொருளின் எடை என்பது அப் பொருளின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையைக் குறிக்கும். புவியீர்ப்பு விசை புவியின்மீது இடத்திற்கு இடம் மாறுபடும். ஆதலால் ஒரு பொருளின் எடை வெவ்வேறு இடங்களில் வெவ்வேருக இருக்கும். ஆஞல், ஒரு பொருளின் நிறையோ எல்லா இடங்களிலும் ஒரே அளவாக இருக்கும். எனவே, நிறை, எடை ஆகிய இரண்டும் முற்றிலும் வேறுபட்டவையாகும். எனினும், ஓர் இடத்தில் ஒரு பொருளின் நிறை அதன் எடைக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும். நிறையை மதிப்பிட பௌதிகத் தராசு (physical balance) அல்லது வேதியியல் தராசையும் (chemical blance) எடையை மதிப்பிட வில் தராசையும் (spring blance) பயன்படுத்துகிருேம்.

பௌதிகத் தராசு: பௌதிகத் தராசின் தத்துவத்தைப் பின்வருமாறு விளக்கிக் கொள்ளலாம். A, B என்ற சீரான கோல் ஒன்று

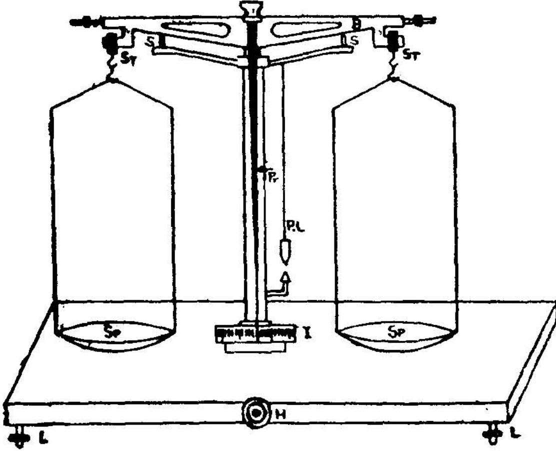


படம் 1·10

(படம் 1·10) அதன் மையத்தில் ஒரு கத்திமுனைமீது நிறுத்தப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் ஒரு முனையில் எடை காண

வேண்டிய ஒரு பொருளையும் மறு முனையில் படித்தர எடைகள் என்னும் எடை மதிப்புப் பொறிக்கப்பட்ட மற்ெருரு பொருளையும் தொங்கவிட்டு, கோல் கிடைமட்டத்திற்கு வரும்வரையில் படித்தர எடைகளை மாற்றுவதாகக் கொள்வோம். கோல் இப்பொழுது கிடை மட்டத்தில் சமநிலையில் இருப்பதால், பொருளின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையும் படித்தர எடையின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையும் ஒன்றையொன்று சரியீடு செய்கின்றன. எனவே, பொருளின் எடை படித்தர எடையின் மதிப்புக்குச் சமமாகும். ஆனால், ஓரிடத்தில் ஒரு பொருளின் நிறை அதன் எடைக்கு நேர்விகிதத்திலிருப்பதால் பொருளின் நிறை படித்தர எடையின் நிறைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

இனி, பௌதிகத் தராசின் அமைப்பு, அதைக்கொண்டு ஒரு

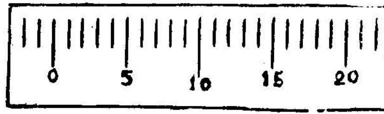


B — தூலம்
S, S — தாங்கிகள்
ST, ST — கொக்கிகள்
SP, SP — தட்டுகள்
P.L — தூக்கு நூற்குண்டு
Pr — குறிமுள்
I — தந்த அளவுகோல்
H — கைப்பிடி
L, L — சரிமட்டத் திருகாணிகள்

படம் 1·11

பொருளின் நிறையைக் காண்பது ஆகியவற்றைப்பற்றிக் காண்போம்.

பௌதிகத் தராசின் அமைப்பைப் படம் 1·11-ல் காணலாம். இதில் B என்ற ஒரு தூலம் (beam) உள்ளது. அதன் மையத்தில் அகேட்டு என்னும் பொருளான கீழ்நோக்கிய கத்திமுனை உள்ளது. கத்திமுனை செங்குத்தான உலோகத் தண்டு ஒன்றின் உச்சியிலுள்ள அகேட்டுத் தளத்தில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. உலோகத் தண்டானது சரிமட்டத் திருகாணிகளின் (Ls-levelling screws) மீது அமைந்த ஒரு மரப்பலகையின் நடுவில் செங்குத்தாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ள உள்ளீடற்ற ஒரு தூணின் (P) வழியே மேலும் கீழும் அசையக்கூடிய தாயுள்ளது. அதனை மரப்பலகையின் முன் உள்ள ஒரு கைப்பிடியைத் (H) திருப்புவதன்மூலம் மேலும் கீழும் அசைக்க முடியும். தூண் செங்குத்தாக உள்ளது என்பதைச் சரிபார்க்க அதன்பக்கத்தில் ஒரு தூக்கு நூற்குண்டு (pl-plumb line உள்ளது. தூலத்தின் இரு முனைகளிலும் அதன் மையத்திலுள்ள கத்திமுனையிலிருந்து சம தூரத்தில் மேல்நோக்கிய இரு கத்திமுனைகள் உள்ளன. அவற்றி னின்று இரு கொக்கிகளும் (St-Stirrup) கொக்கிகளினின்றும் சம எடையுள்ள இரு தட்டுகளும் (Sp) தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. தூலத்தின் மையத்தில் அதற்குச் செங்கோணத்தில் ஒரு குறிமுள் (Pr) பொருத்தப்பட்டுள்ளது. தராசு வேலைசெய்யும்போது, குறிமுள்ளின் கீழ்முனை தூணின் அடிப்பாகத்தில் பொருத்தப்பட்ட தந்த அளவு கோல் ஒன்றின் முன்பக்கவாட்டில் முன்னும் பின்னும் அசைகிறது. குறிமுள் அளவுகோலின் இருபுறமும் சமமாக அசையும்படி தூலத்தின் இரு முனைகளிலும் உள்ள இரு திருகுமரைகளின் உதவி யால் செய்யலாம். அளவுகோலில் வழக்கமாக அளவுக் கூறுகள் இலக்கமிடப்படாமல் இருக்கும். எனவே, படம் 1·12-ல் காட்டி



படம் 1·12

யுள்ளபடி இலக்கமிடப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளவேண்டும். கத்தி முனைகள் கெட்டுவிடாமல் இருக்கத் தராசு வேலைசெய்யாதபோது அதன் தூலம் S,S என்ற இருதாங்கிகளின்மீது நிறுத்தி வைக்கப் படுகிறது. இந் நிலையில் தராசு அமைதி நிலையில் இருக்கிறது என்று கூறப்படும். கைப்பிடியைத் திருப்புவதன்மூலம் தூலம் மேலே தூக்கப்படும்போது, தராசு நிறைகாணத் தொழிற்படு நிலையிலுள்ளது. இதனைத் தராசினைத் தொழிற்படுத்தல் என்று கூறுவோம். இம் முழு அமைப்பும் கதவுகளுடன் கூடிய ஒரு கண்ணாடிப் பெட்டிக்குள் வைக்கப்பட்டிருக்கும்.

எடைப் பெட்டி : தராசுடன் எடைப் பெட்டி ஒன்றும் இருக்கும். எடைப் பெட்டியில் படித்தர எடைகளும் அவற்றைக் கையாள்வதற்காக இடுக்கி ஒன்றும் இருக்கும். எடைகள் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளன :

100 கி	50 கி	20 கி	20 கி	10 கி
	5 கி	2 கி	2 கி	1 கி
	500 மி.கி	200 மி.கி	200 மி.கி	100 மி.கி
	50 மி.கி	20 மி.கி	20 மி.கி	10 மி.கி

தராசைப் பயன்படுத்தி நிறை காண்பதற்குப் பின்பற்றவேண்டிய சில விதிகள்:

(i) தூண் செங்குத்தாக்கப்படவேண்டும். இதற்குத் தூக்கு நூற்குண்டு அதன் குறிமுனைக்கு (index) நேர்மேலாக இருக்கும் வரை சரிமட்டத் திருகாணிகளைத் திருகவேண்டும்.

(ii) தட்டுகளில் இருக்கக்கூடிய தூசுகளை அகற்றவேண்டும்.

(iii) கைப்பிடியை மெதுவாகத் திருப்புவதன்மூலம் தராசைத் தொழிற்படுத்தவேண்டும். இப்போது குறிமுள் தந்த அளவுகோல் முன் அசையும். தூலத்தின் இருமுனைகளிலுமுள்ள திருகுமரைகளின் உதவியால் அது இருபுறமும் சமமாக அசையும்படி செய்ய வேண்டும்.

(iv) எடை காணவேண்டிய பொருளை இடத் தட்டிலும் எடைகளை வலத் தட்டிலும் வைக்கவேண்டும்.

(v) எடைகளை இறங்கு வரிசையிலேயே கையாளவேண்டும்.

(vi) தாரசு பயன்படுத்தப்படாதபோதும், பொருள் அல்லது எடைகளைத் தட்டுகளிலில் சேர்க்கும்போதும் தட்டுகளிலிருந்து எடுக்கும்போதும் தராசினை அமைதிநிலைக்குக் கொண்டுவர வேண்டும்.

(vii) தராசை அமைதிநிலைப் படுத்துவதும், தொழிற்படுத்துவதும் மென்மையாகவே செய்யப்படவேண்டும்.

(viii) எடைகளை இடுக்கியின் உதவியாலேயே கையாள வேண்டும். அவைகளைத் தட்டு அல்லது எடைப்பெட்டியிலன்றி வேறெங்கும் விட்டுவைக்கக்கூடாது.

(ix) எடை காணப்படும் பொருள் வெப்பமேற்று இருக்கக் கூடாது. அவ்வாருயின் தராசுப் பெட்டிக்குள் வெப்பச் சலனம் ஏற்பட்டு நிறுவைக்கு இடையூறு விளைவிக்கும்.

(x) ஒவ்வொரு தராசும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுவரை பயன் படுமாறு அமைக்கப்பட்டிருக்கும். அதற்கு மேற்பட்ட எடையுள்ள பொருள்களை அந்தத் தராசில் நிறுக்கக்கூடாது.

(xi) காட்சிப் பதிவுகள் செய்யப்படும்போது, கண்ணுடிப்பெட்டி யின் கதவுகள் மூடப்படவேண்டும்.

(xii) சோதனை முடிந்தபின் தராசை அமைதி நிலைக்குக் கொண்டுவந்து கண்ணுடிக் கதவுகளை மூடவேண்டும். எடைகளை எடைப்பெட்டியில் உரிய இடங்களில் வைக்கவேண்டும்.

நிலைத்தானம் (Resting point) : சீரமைக்கப்பட்ட ஒரு தராசைத் தொழில்படுத்திஞல் அதன் குறிமுள் தந்த அளவுகோல் முன் அசைந்து கடைசியாக அமைதிபெறும். குறிமுள்ளின் அமைதி நிலைக்கு நேராக அளவுகோலில் உள்ள பகுதி நிலைத்தானம் என்று அழைக்கப்படும். தட்டுகளில் ஏதும் வைக்கப்படாதபோது கிடைக்கும் நிலைத்தானத்திற்கு எடையிரா நிலைத்தானம் (zero resting point) என்று பெயர். குறிமுள் அளவுகோலில் முன்னும் பின்னும் அசையும் போது ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் அளவுகோலில் எப் பகுதியின்முன் திரும்புகிறதோ அதனைத் திரும்புதானம் (turing point) என்றழைக் கிருேம். இடப்புறத்திலுள்ள திரும்புதானத்தை இடத் திரும்புதானம் என்றும், வலப்புறத்திலுள்ள திரும்புதானத்தை வலத் திரும்புதானம் என்றும் கூறுகிருேம். குறிமுள் அமைதி நிலைக்கு வர நீண்ட நேரம் ஆகும். ஆதலால் மூன்று அல்லது ஐந்து அடுத்தடுத்த திரும்பு தானங்களைக்கண்டு அவைகளினின்றும் நிலைத்தானத்தைப் பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.

தராசைக் கவனமாகச் சீரமைத்தபின் அதனைத் தொழிற்படுத்த வேண்டும். குறிமுள் சீராக இயங்கும்வரை பொறுத்திருந்து, ஓர் இடத் திரும்புதானம் முதற்கொண்டு அடுத்தடுத்த ஐந்து திரும்பு தானங்களைப் பதிவு செய்யவேண்டும். இடத் திரும்புதானங்களை a_1, a_2, a_3 எனவும் வலத் திரும்புதானங்களை b_1, b_2 எனவும் கொள்வோம். இடத் திரும்புதானங்களின் சராசரியையும் (x), வலத் திரும்புதானங்களின் சராசரியையும் (y) கணக்கிட வேண்டும். இவ் விரு சராசரிகளின் சராசரி நிலைத்தானத்தைக் கொடுக்கும். திரும்புதானங்களைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்:

திரும்புதானங்கள்	
வலம்	இடம்
a_1 a_2 a_3	b_1
$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$	$y = \frac{b_1 + b_2}{2}$

நிலைத்தானம் $R = \frac{x+y}{2}$

தராசின் உணர்வு நுட்பம் (Sensibility) : தராசின் உணர்வு நுட்பம் என்பது தட்டுகளில் சேர்க்கப்படும் எடைகளில் ஒரு மில்லி கிராம் வேறுபாட்டிற்கு நிலைத்தானத்தில் ஏற்படும் மாறுதலாகும்.

சுழி பளுவிற்கு (zero load) உணர்வு நுட்பத்தைக் காணல் : முதலில் எடையிரா நிலைத்தானத்தைக் கணக்கிடவேண்டும். அடுத்து வலத் தட்டில் 10 மி. கி. எடையை வைத்து நிலைத்தானத் தைக் காணவேண்டும். எடையிரா நிலைத்தானத்தை R_0 எனவும் இரண்டாவது நிலைத்தானத்தை R_1 எனவும் கொள்வோமாயின், தட்டுகளில் உள்ள எடைகள் 10 மி. கி. வேறுபடும்போது, நிலைத் தானத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் $R_0 - R_1$ ஆகும். எனவே, எடை களின் 1 மி. கி. வேறுபாட்டிற்கு ஏற்படும் மாறுதல், அதாவது

$$\text{உணர்வு நுட்பம்} = \frac{R_0 - R_1}{10} \text{ பகுதி / மி. கி.}$$

பல்வேறு பளுக்களில் உணர்வு நுட்பம் : எடுத்துக்காட்டாக 10 கி, 20 கி, 30 கி, 40 கி, 50 கி பளுக்களில் உணர்வு நுட்பங்களைக் காணவேண்டியிருப்பதாகக் கொள்வோம். முதலில் தராசின் தட்டுகள் ஒவ்வொன்றிலும் 10 கி. எடையைச் சேர்த்து நிலைத் தானத்தைக் (R_1) காணவேண்டும். அடுத்து வலத் தட்டில் மேலும் 10 மி. கி. எடையைச் சேர்த்து நிலைத்தானத்தைக் (R_2) காணவேண்டும். இனி 10 கி. பளுவில் உணர்வு நுட்பம்

$\frac{R_1 - R_2}{10}$ பகுதி / மி. கி. ஆகும். இவ்வாறே, தட்டுகளில் 20 கி. 20 கி, 40 கி, 50 கி. ஆகிய எடைகளைச் சேர்த்து, அந்தந்தப் பளுக்களில் உணர்வு நுட்பங்களைக் காணலாம்.

x அச்சில் பளுக்களையும் y அச்சில் உரிய உணர்வு நுட்பங்களையும் குறித்து ஒரு வரைபடம் வரைந்து, கிடைக்கப்பெறும் வளை கோடு பளு—உணர்வு நுட்ப வளைகோடு எனப்படும். பளு அதிகமாகும்போது, உணர்வு நுட்பம் ஒரு குறிப்பிட்ட பளுவரை அதிகமாகிப் பின்னர்க் குறைவதை வரைபடத்திலிருந்து காணலாம்.

ஒரு பொருளின் நிறையை மில்லி கிராமுக்குத் திருத்தமாகக் காணல் : தராசைக் கவனமாகச் சீரமைத்தபின் அதன் எடையிரா நிலைத்தானத்தைக் காணவேண்டும். அதை R_o எனக் கொள்வோம். பின்னர்ப் பொருளை இடத் தட்டில் வைத்து, வலத் தட்டில் எடைப் பெட்டியிலிருந்து எடைகளைச் சேர்த்து, குறிமுள் எடையிரா நிலைத்தானத்திற்கு இருபுறமும் ஏறத்தாழ சமமாக இயங்கும்வரை எடைகளைச் சரிசெய்யவேண்டும். எடைகளின் அளவைப் பதிவு செய்துகொண்டு நிலைத்தானத்தைக் காண வேண்டும். எடையை W எனவும் நிலைத்தானத்தை R_1 எனவும் கொள்வோம். இப்போது R , R ஆகிய இரண்டும் சமமாக இருப்பின், W பொருளின் நிறையைக் குறிக்கும். அவ்வாறன்றி R_1, R_o-ஐவிட அதிகமாக இருப்பின், W பொருளின் நிறையைவிடக் குறைவாக இருக்கிறது என்பதைக் குறிக்கும். எனவே, வலத் தட்டில் மேலும் 10 மி.கி. சேர்த்துத் திரும்பவும் திரும்பு தானத்தைக் காணவேண்டும். மாறாக, R_1 R_o-ஐ விடக் குறைவாக இருப்பின் W, பொருளின் நிறையைவிட அதிகமாக இருப்பதைக் குறிக்கும். எனவே, வலத் தட்டில் 10 மி. கி. எடையைக் குறைத்துத் திரும்பு தானத்தைக் காணவேண்டும். இந்த நிலைத்தானத்தை R_2 எனக் கொள்வோம். R_1, R_2 ஆகிய இரு நிலைத்தானங்களும் R_o-க்கு இரு பக்கத்திலும் அமைவது நல்லது. இனி, பொருளின் நிறையை மில்லி கிராமுக்குத் திருத்தமாகப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம் :

வலத் தட்டில் W கிராம் எடை சேர்க்கப்படும்போது உள்ள நிலைத்தானம், R_1, R_o-ஐ விட அதிகமாகவோ குறைவாகவோ இருப்பதால், அதனை R_o-க்குச் சமமாக்குவதற்காக 10 மி.கி. நிறையைச் சேர்க்கவோ குறைக்கவோ செய்தோம். ஆனால், புதிதாகக் கிடைத்த நிலைத்தானம், R_2, R_o-ஐக் கடந்து, அதனைவிடக் குறைவாகவோ அதிகமாகவோ அமைந்துவிட்டது. இது 10 மி.கி. நிறைச் சேர்ப்பு அல்லது குறைப்பு அதிகம் என்பதைக் குறிக்கிறது. எனவே,

R_1-ஐ R_0-க்குச் சமமாக்கத் தேவையான நிறையைக் கணக்கிட்டுப் பொருளின் நிறையை மில்லி கிராமுக்குத் திருத்தமாகக் காணலாம்.

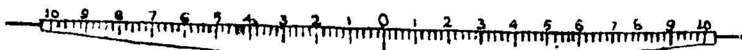
எடையிரா நிலைத்தானம் $= R_0$
வலத் தட்டில் W எடையுடன் நிலைத்தானம் $= R_1$
வலத் தட்டில்10 மி.கி. அளவில் மாறும்போது
நிலைத்தானம் $= R_2$

நிலைத்தானத்தை R_1-லிருந்து R_2-க்கு அதாவது $R_1 \sim R_2$ பகுதிகள் நகர்த்துவதற்குத் தேவையான நிறை $= 10$ மி.கி.
$= 0{\cdot}01$ கி.

நிலைத்தானத்தை R_1 லிருந்து R_0 க்கு நகர்த்துவதற்குத் தேவையான நிறை $= \frac{0{\cdot}01}{(R_1 \sim R_2)}(R_1 \sim R_0)$கி.
$= x$ கிராம்.

இனி, R_1, R_0 ஐவிட அதிகமாக இருப்பின், பொருளின் மில்லி கிராமுக்குத் திருத்தமான நிறை $(w + x)$ கி. ஆகும். R_1, R_0 ஐ விடக் குறைவாக இருப்பின், நிறை $(w - x)$ கி. ஆகும்.

வேதியியல் தராசு : பௌதிகத் தராசைக்கொண்டு ஒரு பொருளின் நிறையை மில்லி கிராமுக்குத் திருத்தமாக நேரடியாகக் காண முடியாது என்பதை முற்பகுதியிலிருந்து அறிகிறோம். ஆனால், வேதியியல் தராசைப் பயன்படுத்தி ஒரு பொருளின் நிறையை 0·1 மி. கிராமுக்குத் திருத்தமாகவும் நேரடியாகக் காணலாம். வேதியியல் தராசின் தூலத்தின் இரு புயங்களும் அதன் மையத்திலிருந்து 10 பெரும் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பெரும் பகுதியும் மேலும் 10 சிறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. (படம் 1·13) இத் தராசுக்கான எடைப்பெட்டியில் சரியாக 10 மி. கி. நிறையுள்ள ஒரு மெல்லிய வளைந்த கம்பியும்

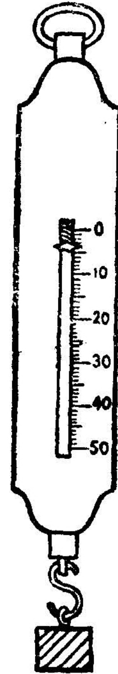


படம் 1·13

இருக்கும். இக் கம்பியைத் தூலத்தின்மீது குறிக்கப்பட்டுள்ள எப் பகுதியின்மீதும் வைப்பதற்கேற்ற அமைப்பு ஒன்றும் உண்டு. இந்த மெல்லிய கம்பி மையத்திலிருந்து வலப் புயத்தில் ஒரு பெரும் பகுதி நகர்த்தினால், வலத் தட்டில் 1 மி. கி. நிறையைச் சேர்ப்பதற்கொப்

பாகும். ஒரு சிறு பகுதி நகர்த்தினால் வலத் தட்டில் 0·1 மி. கி. நிறையைச் சேர்ப்பதற்கொப்பாகும். மாறாக, மையத்திலிருந்து இடப் புயத்தில் ஒரு பெரும் பகுதி அல்லது ஒரு சிறு பகுதி நகர்த்தினால் வலத் தட்டில் முறையே 1 மி. கி. அல்லது 0·1 மி. கி. நிறையைக் குறைப்பதற் கொப்பாகும்.

ஒரு பொருளின் நிறையைக்காண முதலில் தூலத்தின்மீது கம்பியின்றித் தராசின் எடையிரா நிலைத்தானத்தைக் காணவேண்டும். பின்னர்ப் பொருளை இடத் தட்டிலும் எடைப் பெட்டியிலிருந்து எடைகளை வலத் தட்டிலும் வைத்துக் குறிமுள் எடையிரா நிலைத் தானத்திற்கு இருபுறமும் ஏறத்தாழ சமமாக அசையுமாறு எடைகளைச் சரிசெய்ய வேண்டும். அவ்வாறு சரி செய்தபின், மெல்லிய கம்பியைத் தூலத்தின்மீது தக்க இடத்தில் வைப்பதன்மூலம் குறிமுள்ளை எடையிரா நிலைத்தானத்திற்கு இருபுறமும் சமமாக அசையுமாறு செய்யலாம். இப்போது நிலைத்தானத்தைக் கணக்கிட்டால், அது எடையிரா நிலைத்தானத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். எனவே, பொருளின் நிறையானது வலத் தட்டில் சேர்க்கப்பட்டுள்ள நிறை ± கம்பியின் நிலைக்கேற்ற) நிறைக்குச் சமமாக இருக்கும். வலத் தட்டில் சேர்க்கப்பட்ட நிறை w எனவும், மெல்லிய கம்பி தூலத்தின் மையத்திலிருந்து வலப் புயத்தில் x ஆவது சிறு பகுதியில் இருப்பதாகவும் கொண்டால், பொருளின் 0·1 மி. கி-க்குத் திருத்தமான நிறை $(w+v\times 0{\cdot}0001)$ கி ஆகும்; கம்பி இடப் புயத்தில் x ஆவது சிறு பகுதியில் இருப்பின் பொருளின் நிறை $(w-x\times 0{\cdot}0001)$ கி. ஆகும்.



படம் 1·14

வில் தராசு : இதன் தத்துவம் பின்வருமாறு: மேல் முனை கெட்டியாகப் பொருத்தப்பட்ட ஒரு திருகுச் சுருள் வில்லின்கீழ் முனையில் ஒரு பொருளைத் தொங்கவிட்டால், வில் விரிவடையும். பொருளின் எடை வில்லை அதன் நெகிழ்வுறு எல்லைக்கு (elastic limit) அப்பால் விரிவடையச் செய்யாதவரை வில்லின் விரிவு பொருளின் எடைக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும்.

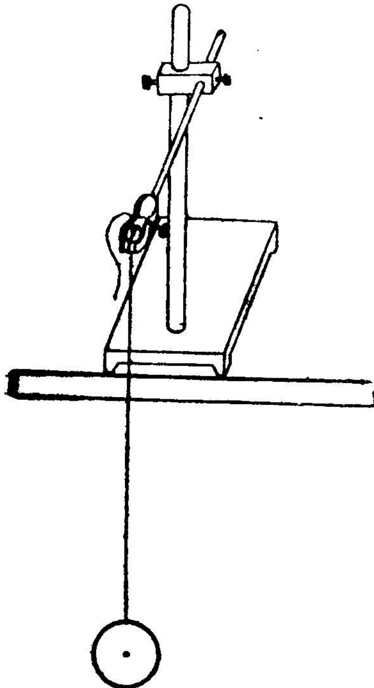
வில் தராசில் ஓர் உலோக உறையினுள் வைக்கப்பட்ட திருகுச் சுருள் வில் ஒன்றின் மேல் முனை கெட்டியாகப் பொருத்தப்பட்டுக் கீழ் முனையில் ஒருகொக்கி இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உலோக உறையின் முன்புறம் உள்ள ஒரு செவ்வகத் துளையில் வில்லின் கீழ் முனையில் பொருத்தப்பட்ட ஒரு குறிமுள் இயங்கு

கிறது. துலையின் விளிம்பில் எடை அளவுக் கூறுகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. (படம் 1·14) எடை காணவேண்டிய பொருளைக் கொக்கியில் தொங்கவிட்டால் குறிமுள்ளுக்கு நேரேயுள்ள அளவீடு பொருளின் எடையைக் கொடுக்கும்.

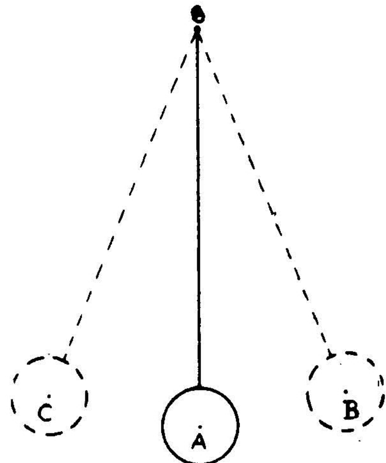
காலஅளவு (Measurement of time)

காலத்தை நுட்பமாக அளவிடச் சீராக, அடுத்தடுத்து ஒரே மாதிரியாக நிகழக்கூடிய ஒரு நிகழ்ச்சி தேவைப்படுகிறது. ஒரு தனி ஊசலின் (simple pendulum) அலைவுகள், இசைக் கவை (tuning fork) ஒன்றின் கரங்களின் அலைவுகள் போன்ற நிகழ்ச்சிகள் சமகால இடைவெளிகளில் தொடர்ந்து ஏற்படுவதை நாமறிவோம். எனவே, அத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் காலத்தை நுட்பமாக அளக்கப் பயன்படுத்தப்படலாம். எனினும், குறிப்பாகத் தனி ஊசலின் அலைவுகள் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

தனி ஊசல் : இலட்சியத் தனி ஊசல் என்பது எடையற்ற,



படம் 1·15 (a)



படம் 1·15 (b)

மெல்லிய, மீட்சியிலா நூல் ஒன்றினுல் தொங்கவிடப்பட்ட எடை

மிக்க பொருள் என வரையறுக்கலாம். ஆனால், செயல்முறையில் உள்ள ஊசலானது மெல்லிய, விரிவுபடாத நூல் ஒன்றினால் தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு கனமான சிறிய கோளமாகும்; இது ஊசலின் குண்டு எனப்படும். நூலானது இரு கூறாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஓர் இறுக்கியால் பற்றப்பட்ட தக்கையின் வழியே செலுத்தப்பட்டிருக்கும் (படம் 1·15 a).

தக்கையின் அடிப்பாகத்திலிருந்து குண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் வரையுள்ள நீளம், ஊசலின் நீளம் எனப்படும். இறுக்கியைத் தளர்த்தி, நூலை மேலும் கீழும் இழுப்பதன் மூலம் ஊசலின் நீளத்தை மாற்றலாம்.

குண்டை அதன் சமநிலையிலிருந்து சிறிது நகர்த்திவிட்டு விட்டால், அது ஒரே சீராக இங்குமங்கும் இயங்கும். சமநிலையிலிருந்து குண்டின் பெரும் இடப்பெயர்ச்சி, வீச்சு (amplitude) எனப்படும். ஊசலின் ஒரு முழு முன்பின் இயக்கம் ஓர் அலைவு எனப்பெறும். படம் 1·15 b-ல் OA, OB என்பவை வீச்சுக்களாகும். ஊசல் B-லிருந்து தொடங்கி, A-ஐ அடைந்து திரும்பவும் B-ஐ அடையும் இயக்கம் ஓர் அலைவு ஆகும். ஊசல் ஓர் அலைவை ஆடி முடிப்பதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் அலைவு நேரம் எனப்படும்.

தனி ஊசலின் விதிகள் : சிறு வீச்சுகளோடு இயங்கும் தனி ஊசலின் அலைவு நேரம் :

(i) அதன் நீளம் மாறிலியாயிருக்கும்போது, வீச்சைப்பொறுத்து மாறுவதன்று.

(ii) அதன் நீளம் மாறிலியாயிருக்கும்போது, குண்டின் அளவு, நிறை அல்லது அதன் மூலப்பொருள் ஆகியவற்றைப் பொறுத்து மாறுவதன்று.

(iii) அதன் நீளத்தின் இருமடி, மூலத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கிறது.

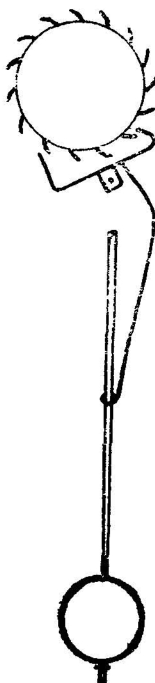
(iv) புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் இருமடி மூலத்திற்கு எதிர் விகிதத்திலிருக்கிறது.

ஊசலின் அலைவு நேரத்தை T எனவும் நீளத்தை l எனவும் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தை g எனவும் குறிப்பிட்டால்,

$$\text{அலைவு நேரம் } (T) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ஒரு குறிப்பிட்ட நீளத்தையுடைய ஊசலின் அலைவுநேரம் ஓரிடத்தில் மாறுமல் இருக்கிறது என்னும் தத்துவத்தை அடிப்படை

யாகக்கொண்டு, ஊசல் காலத்தை அளவிடப் பயன் படுத்தப்படுகிறது. சுவர்க்கடிகாரங்களில் உள்ள ஊசலுடன் ஒரு முனையில் கவைபோன்ற அமைப்புடைய நெம்புகோல் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. [படம் 1·16]. கவையின் முனைகள் கடிகாரத்தின் வில்லினால் இயக்கப்படும் ஒரு பற்சக்கரத்தின் பற்களுக்கிடையே மாறிமாறி ஈடுபடுகின்றன. இதனால் ஊசலின் ஒவ்வொரு பாதி அலைவின்போதும் அதாவது குறிப்பிட்ட சமமான கால இடைவெளிகளில் பற்சக்கரத்தின் இயக்கம் தடைசெய்யப்படுகிறது. எனவே, பற்சக்கரத்தின் இயக்கம் சீராக அமைகிறது. இந்த இயக்கம் மேலும் பல பற்சக்கரங்களால் கடிகாரத்தின் முட்களுக்குக் கொடுக்கப்படுகிறது.



படம் 1·16

தாளப்பொறி (Metronome) : ஒரு வினாடியைவிடக் குறைந்த கால இடைவெளிகளைத் துல்லியமாக அளவிடத் தாளப்பொறி பயன்படுகிறது. இதில் ஒரு மெல்லிய உலோகப்பட்டையும் அதன்மீதுள்ள நழுவு எடையும் ஊசலாகச் செயற்படுகின்றன. பட்டை அதன் அடி முனையில் ஒரு புள்ளியை அச்சாகக்கொண்டு இயங்குகிறது. பட்டையின்மீது எடையின் நிலையை மாற்றுவதன்மூலம் ஊசலின் பயனுறு நீளத்தை (effective length அறியலாம். அலைவு நேரத்தை $\frac{1}{4}$ வினாடி முதல் $1\frac{1}{2}$ வினாடிகள் வரை மாற்றமுடியும். ஊசல் இயங்கும்போது ஒவ்வொரு பாதி அலைவின்போதும் 'டிக் டிக்' என்று உரத்த ஒலி எழுப்பும் அல்லது தாளமிடும். மேலும், இரண்டு, மூன்று அல்லது நான்கு பாதி அலைகளுக்கு ஒரு முறை மணியோசை ஒன்றும் எழுமாறு செய்யக்கூடிய அமைப்பும் உள்ளது. நடுவு எடையின் ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஊசல் நிமிடத்திற்கு எத்தனை டிக் ஒலிகளை எழுப்பும் என்பதை உலோகப் பட்டையின்மீது உள்ள அளவுக் கூறுகளிலிருந்து நேரடியாகத் தெரிந்து கொள்ளலாம். எனவே, இரு தாளங்களுக்கிடையேயுள்ள கால அளவைத் துல்லியமாக அளவிடலாம்.

தாளப் பொறியின் ஏதேனும் இரு தாளங்கள் இரு நிகழ்ச்சிகள் நிகழும் காலங்களோடு ஒன்றும்படி சரிசெய்தால் அவ் விரு நிகழ்ச்சிகளுக்கிடையேயுள்ள கால அளவைத் துல்லியமாக மதிப்பிடலாம்.

மேசைக் கடிகாரங்களிலும் கைக்கடிகாரங்களிலும் ஊசலின் பங்கை நுண்ணிழை விசைச்சுருள் ஒன்றுடன் கூடிய துடிப்பியக்கச் சக்கரம் (balance wheel) என்னும் சக்கரம் ஏற்கிறது.

சோதனைச் சாலைகளில் பயன்படுத்தப்படும் நிறுத்து கடிகாரங்கள் மேசைக் கடிகாரங்களையும் கைக்கடிகாரங்களையும் ஒத்தவை. ஆனால், அவற்றை வேண்டியபோது இயக்கவும் நிறுத்தவும் தேவையான ஓர் அமைப்பு உண்டு. இவற்றின் உதவியால் காலத்தை 0·1 வினாடிக்குத் திருத்தமாக அளவிடமுடியும்.

இதுவரை கூறப்பட்ட கடிகாரங்கள் புவியின் சுழற்சிக் கால அடிப்படையில் காலத்தைப் பதிவுசெய்கின்றன. புவியின் சுழற்சிக் காலம் நிலையான மதிப்பைப் பெற்றிருக்கவில்லை. எனவே, மென் மேலும் துல்லிய அளவீடுகளை நாடும் விஞ்ஞான வல்லுநர்கள் அணுவியல் கடிகாரம் (atomic clock) ஒன்றை அமைத்துள்ளனர். அணுவியல் கடிகாரம் இயற்கையில் நிகழக்கூடிய மாறா அடுக்கத்தைக் (frequency) கொண்ட அலைவுகளை—ஒரு மூலக்கூறிலுள்ள அணுக்களின் அலைவுகளை—அடிப்படையாகக்கொண்ட மின்னியக்கக் கருவி (electronic contrivance)யாகும். அணுவின் அலைவுகள் ஓர் அலைப்பான் (oscillator) மூலம் ஒரு கடிகாரத்தை இயக்குகின்றன. அணுக்களின் அலைவுகள் ஒருபோதும் மாறாமல் இருப்பதால், இவ்வகைக் கடிகாரங்கள் மிகமிகத் துல்லியமானவை.

மாதிரிக் கணக்கு 1. ஒரு மூலக்கோல் அரை மில்லி மீட்டர்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் உதவியுடன் 0·002 செ. மீ. மீச்சிற்றளவையுள்ள (a) முன்னேக்கு வெர்னியர், (b) பின்னேக்கு வெர்னியர் ஆகியவற்றை அமைப்பது எவ்வாறு?

மீச்சிற்றளவை $= 0{\cdot}002$ செ. மீ.

மூலக்கோல் பகுதியின் மதிப்பு $= 0{\cdot}5$ மி. மீ. $= 0{\cdot}05$ செ. மீ.

a. முன்னேக்கு வெர்னியர் :

மீச்சிற்றளவை = 1 மூ.கோ.ப.—1 வெ.கோ.ப.

அதாவது, 0·002 செ.மீ. = 0·05 செ.மீ.—1 வெ.கோ. ப.

∴ 1 வெ. கோ. ப. = (0·05 — 0·002) செ. மீ.

= 0·048 செ. மீ.

எனவே, $\frac{1 \text{ மூ. கோ. ப.}}{1 \text{ வெ. கோ. ப.}} = \frac{0 \cdot 05}{0 \cdot 048} = \frac{25}{24}$

அல்லது 24 மூ. கோ. ப. = 25 வெ. கோ.ப.

அதாவது 24 மூலக்கோல் பகுதிகள் 25 வெர்னியர் கோல் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படவேண்டும்.

b. பின்னோக்கு வெர்னியர் :

மீச்சிற்றளவை 1 வெ. கோ. ப. – 1 மூ கோ. ப.

அதாவது, 0·002 செ.மீ. = 1 வெ. கோ. ப.—0·05 செ.மீ.

∴ 1 வெ. கோ. ப. = (0·002 + 0·05) செ. மீ.

= 0·052 செ.மீ

எனவே, $\frac{1 \text{ மூ. கோ.ப.}}{1 \text{வெ. கோ.ப.}} = \frac{0·050}{0·052} = \frac{25}{26}$

அல்லது 25 வெ. கோ. ப. = 26 மூ. கோ. ப.

அதாவது 26 மூலக்கோல் பகுதிகள் 25 வெர்னியர்கோல் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 2. நிறமாலை மானி ஒன்றில் உள்ள வட்ட அளவுகோல் $\frac{1}{4}$ பாகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு அத்தகைய 29 பகுதிகள் 30 வெர்னியர் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. வெர்னியரின் மீச் சிற்றளவையைக் கணக்கிடுக.

மூ. கோ ப.-ன் மதிப்பு $= \frac{1}{4}°$

வெர்னியரின் நீளம் 29 மூ. கோ. ப.

வெர்னியரில் உள்ள பகுதிகள் = 30

வெ. கோ. ப.-ன் மதிப்பு $= \frac{29}{30}$ மூ. கோ. ப.

மீச்சிற்றளவை = 1மூ.கோ.ப.—1வெ.கோ.ப.

$= (1 - \frac{29}{30})$ மூ. கோ. ப

$= \frac{1}{30}$ மூ. கோ. ப.

$= \frac{1}{30} \times \frac{1}{4}° = \frac{1}{120}° = \frac{1}{2}'$

எனவே மீச்சிற்றளவை $= \frac{1}{2}$ கலை.

மாதிரிக் கணக்கு 3. பாரமானி ஒன்றில் மூலக்கோல் மில்லி மீட்டர்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. வெர்னியரில் 19 மூ. கோ. பகுதிகள் 20 பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. ஓர் அளவீட்டின்போது வெர்னியர் சுழி 58·6 செ. மீ. 58·7 செ. மீ. ஆகியவற்றிற் கிடையேயும் வெர்னியரின் 14வது பகுதி மூலக்கோல் பகுதி ஒன்றுடன் ஒன்றியும் உள்ளன. அளவீட்டைக் கணக்கிடுக.

மீச்சிற்றளவை :

மீச்சிற்றளவை (மீ. அ) = 1 மூ. கோ. ப. – 1 வெ. கோ. ப.

$= (1 - \frac{19}{20})$ மூ. கோ. ப.

$= \frac{1}{20}$ மூ. கோ. ப.

= 0·05 மி. மீ.

= 0·005 செ. மீ.

அளவீடு :

வெர்னியர் சுழி 58·6 செ. மீ. 58·7 செ. மீ. ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ளதால்,

மூ.கோ. அ. = 58 · 6 செ. மீ.
வெ. கோ. அ = 14 வெ. கோ. பகுதிகள்
எனவே, மொத்த அளவீடு = மூ. கோ. அ + (வெ.கோ.அ × மீ.அ)
= 58·6 செ.மீ. + 14 × ·005 செ.மீ
= (58·6 + 0·07) செ.மீ.
∴ பாரமானியின் அளவீடு = 58·67 செ. மீ.

பயிற்சி

1. அரை பாகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட வட்ட அளவுகோல் ஒன்றுடன் இயங்கும் ஒரு வெர்னியரில், 29 மூலக்கோல் பகுதிகள் 30 பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. வெர்னியரின் மீச்சிற்றளவையைக் கணக்கிடுக. [1 கலை]

2. மில்லி மீட்டர்களாகப் பிரிக்கப்பட்ட ஒரு மூலக்கோலின் உதவியால் 0·005 செ. மீ. மீச்சிற்றளவையைக் கொண்டுள்ள (a) முன்னோக்கு வெர்னியரை (b) பின்னோக்கு வெர்னியரை அமைப்பது எவ்வாறு? [19 மூ.கோ. ப. = 20 வெ. கோ.ப. 21 மூ.கோ.ப. = 20 வெ. கோ. ப.]

3. ஒரு கோளமானியின் புரியிடைத்தூரம் 0·5 மி. மீ. தலைக்கோல் பகுதிகள் 100. அதன் தொடக்க அளவீட்டின்போது, புரிக்கோலில் தலைக்கோல் 19ஆவது பகுதிக்கும் 20ஆவது பகுதிக்கும் இடையிலும் தலைக்கோலளவீடு 43 ஆகவும் இருக்கிறது. திருகுக்கு அடியில் ஒரு சிறு கண்ணாடித் தகட்டை வைக்கும்போது, புரிக்கோலில் தலைக்கோல் 21ஆவது பகுதிக்கும் 22ஆவது பகுதிக்கும் இடையிலும் தலைக் கோலளவீடு 56 ஆகவும் இருப்பின் தகட்டின் தடிப்பைக் கணக்கிடுக. [1·065 மி. மீ.]

4. ஒரு கோளமானியின் இருகால்களுக் கிடையேயுள்ள தொலைவு 4 செ. மீ. தொடக்க அளவீடு 9·95 மி.மீ. அது ஒரு குவி பரப்பின்மீது வைக்கப்பட்டபோது, அதன் அளவீடு 10·75 மி. மீ. குவிபரப்பின் வளைவு ஆரத்தைக் கணக்கிடுக. [33·37 செ.மீ.]

2. வேகம், திசைவேகம், முடுக்கம்

(Speed, Velocity, Acceleration)

முன்னுரை

வேகம், திசைவேகம் ஆகியவற்றைப்பற்றிப் பார்க்குமுன், இங்குப் பேசப்பெறும் துகள் (particle) என்னும் சொல்லைப்பற்றித் தெளிவாக அறிந்துகொள்வது நல்லது. இடத்தை நிறைக்கக்கூடிய எதுவும் பருப்பொருள் (matter) எனப்படும். அத்தகைய பருப்பொருளின் ஒரு பகுதி, பொருள் (body) எனப்படும். பருப்பொருளின் மிக நுண்ணிய பகுதியினைத் துகள் எனலாம். பௌதிகத்தில் துகள் என்பது ஒரு பொருளின் கணிதவியல் உருவப்படிவம் (mathematical model) ஆகும். காட்டாக ஓர் ஊசல் குண்டின் பரிமாணம் ஊசலின் நீளத்தை நோக்க மிகச் சிறியதாக உள்ளது. அவ்வாறே சூரியனின் தொலைவை நோக்க, இப் புவியின் பரிமாணம் மிகச்சிறியது. எனவே, சூழ்நிலைகளுக்கு ஏற்றவாறு துகளினைக் கணிதவியல் உருப்படிவமாகக் கொள்ளவேண்டும். துகளின் நிலையை ஒரு புள்ளியால் குறிப்பிடுகிறோம்.

எந்திரவியல் என்பது பொருள்களின் இயக்கத்தைப்பற்றிக் கூறுகிறது எனக் கூறப்பட்டது. இயக்கம் என்றால் என்ன ? ஒரு துகள் ஒரு நிலையான புள்ளியைப்பொறுத்து எப்பொழுதும் ஒரே நிலையில் இருந்தால், அது ஓய்வில் இருப்பதாகக் கூறப்படுகிறது. மாறாக அத் துகள் தன் நிலையைத் தொடர்ந்து மாற்றிக்கொண்டே இருந்தால் அது இயங்குகிறது எனக் கூறுகிறோம். உண்மையில் ஓய்வு, இயக்கம் ஆகிய இரு சொற்களும் ஒரு குறிப்பிட்ட சுட்டமைப்பை (frame of reference) மனதிற் கொண்டால்தான் பொருள் பெறும். ஆற்றில் இரு படகுகள் ஒரே திசையில் ஒரே வேகத்தில் செல்வதாகக் கொள்வோம். இப்போது ஒரு படகில் இருக்கும் பார்வையாளருக்கு (observer) மற்றொரு படகு ஓய்வில் இருப்பதாகத் தோன்றும். ஆனால், படகுகள் வெவ்வேறு வேகங்களைப்

பெற்றிருப்பின் ஒரு படகில் இருக்கும் பார்வையாளருக்கு மற்ருெரு படகு இயங்குவதாகத் தோன்றும். இயங்கும் புகைவண்டியினுள் அமர்ந்திருக்கும் ஒருவர் புகைவண்டியைப் பொறுத்தவரை ஓய்வில் இருக்கிருர். ஆனுல், வெளியில் நிலையாக இருக்கும் பார்வையாளர் ஒருவரைப் பொறுத்தவரை அவர் இயங்குகிருர். முந்தியதில் புகைவண்டி சுட்டமைப்பாகவும் பிந்தியதில் புவி சுட்டமைப்பாகவும் கருதப்படும். அவ்வாறே புவிப்பரப்பின்மீது ஒரு பொருள் ஓய்வில் (ஒரே நிலையில்) இருக்கிறது என்று கூறினுல், புவியைச் சுட்டமைப் பாகக் கருதியே அவ்வாறு கூறப்படுகிறது. ஆனுல், சூரியனைச் சுட்டமைப்பாகக்கொண்டால் அப் பொருள் ஓய்வில் இருப்பதில்லை. பௌதிகத்தில் எந்தத் திண்பொருளையும் (rigid body) சுட்டமைப் பாகக் கருதலாம். ஏனெனில், ஒரு பொருள் மற்ருெரு பொருளைச் சார்ந்தவரை இயங்கலாம் அல்லது ஓய்வில் இருக்கலாம். குறிப்பாக இப் பகுதியில் புவியே சுட்டமைப்பாகக் கருதப்படும்.

இயங்கும் ஒரு துகளின் அடுத்தடுத்த நிலைகளை இணைத்துக் கிடைக்கப்பெறும் கோடு அதன் பாதையைக் குறிக்கும். அக் கோடு நேர்க்கோடாக அமையுமாயின், துகளின் இயக்கம் நேர்க் கோட்டியக்கம் (rectilinear motion) எனவும் வளைகோடாக அமையுமாயின் வளைவியல் இயக்கம் (curvilinear motion) எனவும் அழைக்கப்பெறும்.

வேகம்

ஒரு துகள் அதன் பாதை வழியே—அது எத் திசையில் சென்ருலும்—கடக்கும் தொலைவு—நேரவீதம் அதன் வேகம் எனப் படும்.

சீரான வேகம் : இயங்கும் துகள் ஒன்று சமகால அளவுகளில்—அக் கால அளவுகள் எவ்வளவு சிறியதாக இருப்பினும் — சம தொலைவுகளைக் கடக்குமாயின், அது சீரான வேகம் கொண்டுள்ளது எனக் கூறப்படும்.

வேகம் சீரானதாக இருக்கும்போது, துகள் ஓரலகு நேரத்தில் கடக்கும் தொலைவு அதன் வேகமாக அளவிடப்படுகிறது.

வேகம் சீரானதாக இல்லாதபோது, ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் துகளின் சராசரி வேகத்தையோ அல்லது ஒரு கணத்தில் வேகத்தையோ கணக்கிடுகிருேம்.

சராசரி வேகம்: ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் துகளின் சராசரி வேகம் என்பது துகள் அக் கால இடைவெளியில் கடந்த

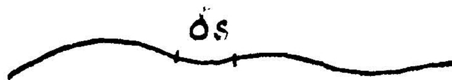
மொத்த தொலைவுக்கும் அக் கால இடைவெளிக்கும் உள்ள தகவு ஆகும். துகளின் சராசரி வேகத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் ஒரு துகளின் சராசரி வேகம் என்பது, அதே கால இடைவெளியில் கடந்த மொத்தத் தொலைவைக் கடப்பதற்கு அது பெற்றிருக்கவேண்டிய சீரான வேகமாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் வேகம் : ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் வேகம் என்பது, அக் கணத்தை உள்ளடக்கிய மிகமிகக் குறுகிய கால இடைவெளியில் துகள் கடந்த தொலைவுக்கும் அக் கால இடைவெளிக்கும் — அதன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது — உள்ள தகவு ஆகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் வேகத்தை வகை நுண் கணிதக் (differential calculus) குறியீடுகளைப் பயன்படுத்திப் பின் வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

இயங்கும் ஒரு துகள் குறிப்பிட்ட t என்ற கணத்தையடுத்துள்ள δt என்ற மிகக்குறுகிய கால அளவில் δS என்னும் தொலைவைக் கடப்பதாகக் கொள்வோம். [படம் 2·1]. இனி, $\frac{\delta s}{\delta t}$ அக் கால அளவில்



படம் 2·1

துகளின் சராசரி வேகத்திற்குச் சமமாகும். δt-ன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது $\frac{\delta s}{\delta t}$-ன் அணுக்க மதிப்பு (limiting value) குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் வேகத்தைக் கொடுக்கும். அதாவது,

$$\text{குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் வேகம்} = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

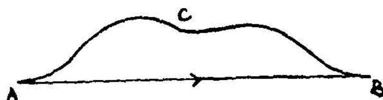
வேகத்திற்கான அலகு மெட்ரிக் முறையில் : செ. மீ./வி; பிரிட்டன் முறையில் : அடி/வி.

வேகத்தைப் பொறுத்தவரை துகள் செல்லும் திசையைக் கவனத்தில் கொள்வதில்லையாதலால் வேகத்திற்கு எண்மதிப்பு மட்டுமே உண்டு. இவ்வாறு எண்மதிப்பால் மட்டும் குறிப்பிடப்படும் ராசிகள், ஸ்கேலார்கள் (scalars) எனப்படுகின்றன.

இடப்பெயர்ச்சி (Displacement)

இயங்கும் துகள் ஒன்றின் இரு நிலைகளுக்கு இடையே நேர் கோட்டில் அளவிடப்படும் தொலைவு துகளின் இடப்பெயர்ச்சி எனப்படும்.

படம் 2·2-ல் A, B என்ற புள்ளிகள் இரு கணங்களில் இயங்கும் துகள் ஒன்றின் நிலைகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது, A, B ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்கோடு துகளின் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கிறது. ஒரு துகளின் இடப்பெயர்ச்சியைப்பற்றி முற்றிலும் அறிய அதன் எண்மதிப்பு, திசை ஆகிய இரண்டையும் அறியவேண்டும். எனவே, ஒரு துகளின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு எண் மதிப்பும் திசையும் உண்டு. படம் 2·2-ல் AB-ன் நீளமும், திசையும்



படம் 2·2

துகளின் இடப்பெயர்ச்சியின் முறையே எண்மதிப்பையும் திசையையும் குறிக்கின்றன. துகள் A-லிருந்து தொடங்கி B-ஐ அடையு முன், எப் பாதையில் சென்றாலும் இடப்பெயர்ச்சி ஒரேயளவாய்த்தான் இருக்கும். இடப்பெயர்ச்சியின் திசையை ஒரு அம்புக் குறியால் குறிப்பது மரபு. படம் 2·2-ல் அம்புக்குறியானது இடப்பெயர்ச்சி A-லிருந்து B-க்கு உள்ளது என்பதைக் குறிக்கிறது. எண்மதிப்பு, திசை ஆகிய இரண்டும் பெற்ற இடப்பெயர்ச்சிபோன்ற ராசிகள் வெக்டர்கள் (vectors என அழைக்கப்படுகின்றன. (வெக்டர் என்னும் சொல்லை இடப்பெயர்ச்சி அல்லது வேறெந்த வெக்டரையும் குறிக்கும் கோட்டைக் குறிப்பிடவும் பயன்படுத்துவது வழக்கம்.)

படம் 2·2-ல் AB என்பது இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் (displacement vector) எனப்படும்.[1]

[1] ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும்போது, அச்சில் தடித்தஎழுத்தாலும் எழுதும்போது அதன்மீது அம்புக்குறியிட்டும் குறிப்பது வழக்கம். காட்டாக, S என்ற எண்மதிப்பையுடைய இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரை அச்சில் S என்று எழுதும்போது S என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

இடப்பெயர்ச்சிகளின் தொகுப்பு (Composition of displacements)

ஒரு துகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இடப்பெயர்ச்சிகளைப் பெற்றிருப்

பதாகக் கொள்வோம். அதன் தொகுபயன் (resultant) இடப்பெயர்ச்சியைக் காணலாம். இவ்வாறு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இடப்பெயர்ச்சிகளின் தொகுபயனைக் காண்பதனை இடப்பெயர்ச்சிகளின் தொகுப்பு என அழைக்கிறோம்.

துகளின் இடப்பெயர்ச்சிகள் ஒரே திசையில் இருப்பின் அதன் தொகுபயன் இடப்பெயர்ச்சி, அந்த இடப்பெயர்ச்சிகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைக்குச் (algebraic sum) சமமாகும்.

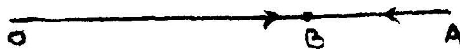
படம் 2·3-ல் துகளின் இடப்பெயர்ச்சிகள் ஒரே திசையில் அமைந்துள்ளன. துகளின் முதல் இடப் பெயர்ச்சியை, $\overrightarrow{OA}$ என்ற



படம் 2·3

வெக்டரும் இரண்டாவது இடப்பெயர்ச்சியை $\overrightarrow{AB}$ என்ற வெக்டரும் குறிக்குமாயின், துகளின் தொகுபயன் இடப்பெயர்ச்சியை $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும்.

படம் 2·4-ல் துகளின் இடப் பெயர்ச்சிகள் எதிர்த்திசைகளில் அமைந்துள்ளன. துகளின் முதல் இடப்பெயர்ச்சியை $\overrightarrow{OA}$ என்ற



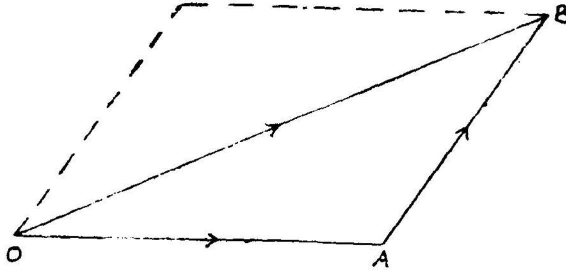
படம் 2.4

வெக்டரும் இரண்டாவது இடப்பெயர்ச்சியை $\overrightarrow{AB}$ என்ற வெக்டரும் குறிக்குமாயின், துகளின் தொகுபயன் இடப்பெயர்ச்சியை $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ அல்லது $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும்.

இனி, வெவ்வேறு திசைகளில் உள்ள இடப் பெயர்ச்சிகளின் தொகுபயனைப்பற்றிக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு துகள் O என்ற புள்ளியிலிருந்து தொடங்கி, முதலில் OA என்ற இடப்பெயர்ச்சியையும் பின்னர் AB என்ற இடப் பெயர்ச்சியையும் படம் 2·5-ல் காட்டியுள்ளவாறு

பெறுவதாகக் கொள்வோம். படத்தில் $\vec{OA}$, $\vec{AB}$ என்பவை துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர்களாகும். இனி, துகளின் தொடக்க நிலை



படம் 2·5

யையும் இறுதிநிலையையும் இணைக்கும் நேர்கோடு அதன் தொகு பயன் இடப் பெயர்ச்சியைக் குறிக்குமாதலால், துகளின் தொகுபயன் இடப்பெயர்ச்சியை $\vec{OB}$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும்.

படத்திலிருந்து OB என்பது OA, AB ஆகியவற்றை அண்டைப்பக்கங்களாக அமைத்து வரையப்பட்ட இணைகரத்தின் மூலை விட்டமாக அமைகிறது என்பதைக் காணலாம்.

அதாவது, இரு வேறுபட்ட திசைகளில் உள்ள ஒரு துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர்களை அண்டைப் பக்கங்களாக அமைத்து, ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட இணைகரத்தின் அந்தப்புள்ளி வழியே செல்லும் மூலைவிட்டம் அந்த இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர்களின் தொகுபயன் வெக்டரைக் குறிக்கும்.

இடப் பெயர்ச்சிகள் $\vec{OA}$, $\vec{OC}$ ஆகிய வெக்டர்களால் குறிக்கப் படினும், அவற்றின் தொகுபயனை $\vec{OB}$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும்.

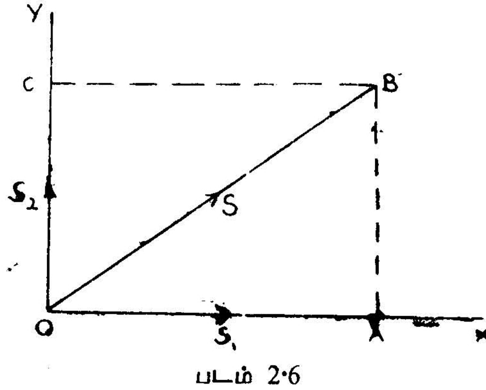
படம் 2·5-ல் $\vec{OA}$, $\vec{OC}$ என்பவை $\vec{OB}$-ன் ஆக்கக் கூறுகள் எனப் படும்.

இடப்பெயர்ச்சிகளின பிரிவீடு (Resolution of displacements)

இரண்டு இடப்பெயர்ச்சிகளின் தொகுபயனுன ஒற்றை இடப் பெயர்ச்சி ஒன்றை எவ்வாறு காணமுடியுமோ, அவ்வாறே ஓர் இடப்

பெயர்ச்சியின் ஆக்கக் கூறுகளையும் காணலாம். இவ்வாறு ஒற்றை இடப்பெயர்ச்சி ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளைக்காண்பது, இடப்பெயர்ச்சிகளின் பிரிவீடு எனப்பெறும். பொதுவாக ஒரு இடப்பெயர்ச்சியை ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாயுள்ள இரு இடப்பெயர்ச்சிகளாகப் பிரிப்பது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டாக படம் 2·6-ல் $\overrightarrow{OB}$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும் S என்ற ஒற்றை இடப்பெயர்ச்சியை OB-உடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் OX என்ற திசையிலும் அதற்கு நேர்



படம் 2·6

குத்தாக உள்ள OY என்ற திசையிலும் பிரிக்கவேண்டியிருப்பதாகக் கொள்வோம். B-லிருந்து OX-க்கும் OY-க்கும் முறையே OA, OC என்ற குத்துக்கோடுகளை வரையவும். OABC என்பது ஓர் இணைகரமாகும். $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{C}$ ஆகியவை முறையே OX, OY ஆகிய திசைகளில் S_1, S_2 என்ற இடப்பெயர்ச்சிகளின் வெக்டர்களைக் குறிக்குமாயின், இடப்பெயர்ச்சிகளின் தொகுப்பாக்கத் தத்துவத்தின்படி S என்பது S_1, S_2 ஆகியவற்றின்தொகுபயனாகும். எனவே, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ என்பவை S-ன் ஆக்கக் கூறுகளாகும்.

படத்தில், $\dfrac{OA}{OB} = \cos\theta$

எனவே, $S_1 = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}\cos\theta = S\cos\theta$

மேலும், $\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{OC}{OB} = \sin\theta$

$= \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}\sin\theta = S\sin\theta$

திசைவேகம்

இயங்கும் துகள் ஒன்றின் இடப்பெயர்ச்சி — நேரவீதம் அத்துகளின் திசைவேகம் எனப்படும்.

திசைவேகமும் ஒரு வெக்டராகும்.

ஒரு துகள் நேர்கோட்டில், இயங்கும்போது அதன் வேகமும் திசைவேகமும் சமமாகும். ஆனால், துகள் வளைவுப்பாதை ஒன்றில் சீராகச் செல்லும்பொழுது அதன் வேகம் மாறாமலிருந்தபோதிலும் அதன்இயக்கத் திசை தொடர்ந்து மாறுவதால், அதன் திசைவேகம் மாறுபடும்.

சீரான திசைவேகம் : இயங்கும் துகள் ஒன்று சமகால அளவுகளில் — அக் கால அளவுகள் எவ்வளவு சிறியதாயிருப்பினும் — சம இடப்பெயர்ச்சிகளைப் பெற்றிருப்பின், அது சீரான திசைவேகத்தைக்கொண்டுள்ளது எனக் கூறப்படும்.

அதாவது துகள் ஒரே நேர்கோட்டில் சென்று சமகால அளவுகளில்—அக் கால அளவுகள் எவ்வளவு சிறியதாயிருப்பினும் — சம தொலைவுகளைக் கடக்குமாயின், சீரான திசைவேகத்தைப் பெறும்.

துகளின் திசைவேகம் சீரானதாக இருக்கும்போது, துகள் ஓரலகு நேரத்தில் பெறும் இடப்பெயர்ச்சி அதன் திசைவேகமாக அளவிடப் படுகிறது.

ஒரு துகள் சமகால அளவுகளில் கடக்கும் தொலைவுகளோ அல்லது அதன் இயக்கத்திசையோ மாறுபடின் அதன் திசைவேகம் மாறுகிறது எனலாம்.

திசைவேகம் மாறுபடும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில், துகளின் சராசரித் திசைவேகத்தையோ அல்லது ஒரு கணத்தில் அதன் திசைவேகத்தையோ கணக்கிடுகிறோம்.

சராசரித் திசைவேகம் : ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் துகளின் சராசரித் திசைவேகம் என்பது துகள் அக் கால இடைவெளியில் பெற்ற மொத்த இடப்பெயர்ச்சிக்கும் அக் கால இடைவெளிக்கும் உள்ள தகவு ஆகும்.

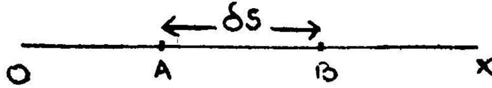
அதாவது, சராசரித் திசைவேகம் $= \dfrac{\text{மொத்த இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{எடுத்துக்கொண்ட நேரம்}}$

சராசரித் திசைவேகத்தைப் பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம் :

ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் சராசரித் திசைவேகம் என்பது அதே கால இடைவெளியில் பெற்ற மொத்த இடப் பெயர்ச்சியைப் பெறத் துகள் பெற்றிருக்கவேண்டிய சீரான திசை வேகமாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் திசைவேகம் : ஒரு குறிப் பிட்ட கணத்தில் துகளின் திசைவேகம் என்பது, அக் கணத்தை உள்ளடக்கிய மிகமிகக் குறுகியகால இடைவெளியில் துகள் பெற்ற இடப்பெயர்ச்சிக்கும் அக் கால இடைவெளிக்கும்—அதன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது—உள்ள தகவு ஆகும்.

வகை நுண்கணிதக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவோமாயின், OX என்ற திசையில் இயங்கும் ஒரு துகள் t என்ற கணத்தில் A என்ற புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். [படம் 2·7]. அந்தக்



படம் 2·7

கணத்தில் துகளின் திசைவேகத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்க லாம். அந்தக் கணத்தையடுத்த δt என்ற மிகமிகக் குறுகிய கால அளவின் இறுதியில் துகள் B என்ற புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இனி, AB என்பது δS எனில், அக் குறுகிய கால இடைவெளியில் துகளின் சராசரித் திசைவேகம் $\frac{\delta S}{\delta t}$ ஆகும். δt-ன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது $\frac{\delta S}{\delta t}$-ன் அணுக்க மதிப்பு குறிப் பிட்ட கணத்தில் துகளின் திசைவேகத்தைக் கொடுக்கும்.

அதாவது,

$$\text{குறிப்பிட்ட கணத்தில் திசைவேகம் } v = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$$

அதாவது,
$$v = \frac{ds}{dt} \quad \dots \quad \dots \quad 2{\cdot}1$$

திசைவேகத்தின் அலகு மெட்ரிக் முறையில், செ. மீ./வி.; பிரிட்டன் முறையில், அடி/வி.

திசை வேகங்களின் தொகுப்பு : ஒரு துகள் ஒரே சமயத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திசைவேகங்களைப் பெற்றிருக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக ஆறு ஒன்றைக் கடக்கும் பெரும் படகு ஒன்றில் நடக்கும் ஒரு மனிதனைக் கருதுவோம். அம் மனிதன் அவனது திசைவேகம்,

படகின் திசைவேகம், நீரின் திசைவேகம் ஆகிய மூன்று திசை வேகங்களைப் பெறுகிறான். அம் மூன்று திசைவேகங்களும் விளைவிக்கக்கூடிய அதே பலனை விளைவிக்கும் ஒற்றைத் திசைவேகம் ஒன்றைக் காணமுடியும். இவ்வாறு பல்வேறு திசைவேகங்களின் பயனை விளைவிக்கக்கூடிய ஒற்றைத் திசைவேகத்தைக் காண்பது விசைகளின் தொகுப்பு எனப்படுகிறது. ஒற்றைத் திசைவேகம் தொகு பயன் திசைவேகம் எனவும். ஏனைய திசைவேகங்கள் அதன் ஆக்கக் கூறுகள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒரு துகள் ஒரே திசையில் V_1, V_2 என்ற திசை வேகங்களை ஒருங்கே பெற்றிருப்பின், அதன் தொகுபயன் திசை வேகம் $V = V_1 + V_2$ ஆகும். மேலும், அது அவ் விருதிசைவேகங்களின் திசையிலேயே செயற்படும்.

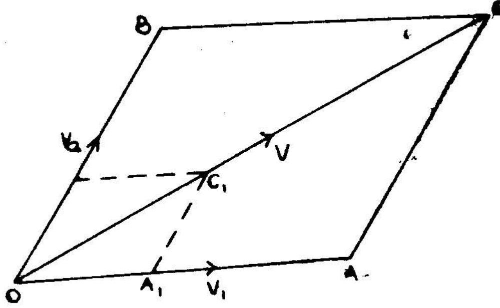
ஒரு துகள் எதிர்த் திசைகளில் செயற்படும் V_1, V_2 என்ற இரு திசை வேகங்களைப் பெற்றிருப்பின், அத் துகளின் தொகுபயன் திசை வேகம் $V = V_1 - V_2$. அது அவ் விரு திசை வேகங்களுள் பெரியதின் திசையில் செயற்படும்.

துகள் ஒன்றின்மீது செயற்படும் இரு திசை வேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்த நிலையிலுள்ள இரு வேறு திசைகளில் இருப்பின், அவற்றின் தொகுபயனைத் திசைவேகங்களின் இணைகர விதி என்னும் விதியால் பெறலாம்.

திசைவேகங்களின் இணைகர விதி : ஓர் இயங்கும் துகளின் இரு திசைவேக வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் இணைகரம் ஒன்றின் அண்டைப் பக்கங்களால் குறிக்கமுடியுமாயின், அந்த இணைகரத்தின் அப் புள்ளி வழியே செல்லும் மூலைவிட்டம் அவற்றின் தொகுபயன் வெக்டரைக் குறிக்கும்.

துகளின் V_1, V_2 என்ற திசை வேகங்கள் O என்ற புள்ளியில் இருந்து வரையப்பட்ட முறையே $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். [படம் 2·8] (OA, OB, ஆகிய கோடுகளின் நீளங்களும் திசைகளும் முறையே V_1, V_2 ஆகிய வற்றின் எண் மதிப்புகளையும் திசைகளையும் குறிக்கும். இனி OA, OB ஆகியவற்றை அண்டைப் பக்கங்களாக அமைத்து, OACB என்ற இணைகரத்தை அமைப்போமாயின், அந்த இணைகரத்தின் O என்ற புள்ளிவழியே செல்லும் OC என்ற மூலை விட்டம் V_1, V_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் வெக்டரைக் (V) குறிக்கும். இவ் வுண் மையைப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

படம் 2·8-ல் துகளின் இயக்கங்களைக் கீழ்வருமாறு கருதலாம். துகள் OA வழியே V_1 என்ற திசை வேகத்துடனும் அதே சமயத்



படம் 2·8

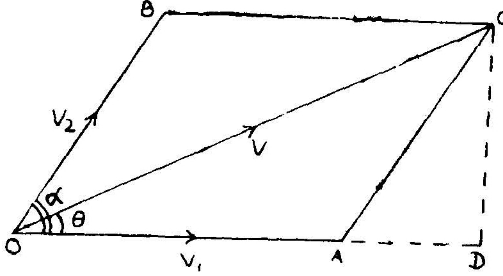
தில் OA அதற்கு இணையாக OB திசையில் V_2 என்ற திசைவேகத்துடனும் இயங்குவதாகக் கொள்வோம். $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ஆகியவற்றின் நீளங்கள் V_1, V_2 ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புகளைக் குறிப்பதால் ஒரு வினாடியின் இறுதியில் துகள் A-லும், OA, BC என்ற நிலையிலும் இருக்கும்; எனவே, துகள் C என்ற புள்ளியில் இருக்கும். ஒரு வினாடியைவிடக் குறைந்த t என்ற நேரத்தின் இறுதியில் துகள் OA வழியே $\vec{OA_1} = V_1 t$ என்ற இடப் பெயர்ச்சியையும் $\vec{OA}$, அதற்கிணையாக OB என்ற திசையில் $\vec{A_1C_1} = V_2 t$ என்ற இடப்பெயர்ச்சியையும் பெறுவதாகக் கொள்வோம். $\vec{OC_1}$ என்பது $\vec{OA_1}$, $\vec{A_1C_1}$ ஆகிய இடப் பெயர்ச்சிகளின் தொகுபயனாதால் t கால இறுதியில் துகள் C_1-ல் இருக்கும்.

OA_1C_1, OAC ஆகிய இரு முக்கோணங்களும் ஒத்த முக்கோணங்களாதலால்,

$$\frac{OA_1}{A_1C} = \frac{V_1 t}{V_2 t} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{OA}{OC}$$

எனவே, O, C_1, C ஆகியவை ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும். இக் கூற்று t-ன் எந்த மதிப்புக்கும் பொருந்துமாதலால் OACB-ன் மூலை விட்டமான OC, V_1, V_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் வெக்டரைக் குறிக்கும்.

தொகுபயன் வெக்டரின் எண் மதிப்பு (கணிதமுறை) : திசை வேகங்களுக் கிடையே யுள்ள கோணம் α எனக் கொள்வோம்.



படம் 2·9

படம் 2·9-ல் $\vec{OA}$-ன் நீளம் V_1-ன் எண் மதிப்பை (V_1) யும் $\vec{OB}$-ன் நீளம் V_2-ன் எண் மதிப்பை (V_2) யும் குறிக்கின்றன ; $\hat{AOB} = \alpha$; இனி $\vec{OC}$-ன் நீளம் V_1, V_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயனின் (V) எண் மதிப்பைக் (V) குறிக்கும். $\hat{AOC} = \theta$ என இருக்கட்டும். C-லிருந்து OD-க்கு CD என்ற நேர் குத்துக்கோட்டை வரைந்தால், ODC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$OC^2 = OD^2 + DC^2$$
$$= (OA + AD)^2 + DC^2$$

அதாவது, $OC^2 = OA^2 + AD^2 + 2\ OA.AD + DC^2$

அல்லது $OC^2 = OA^2 + AC^2 + 2\ OA.AD$

$$[\because AD^2 + DC^2 = AC^2]$$

ஆனால், $AD = AC \cos \hat{CAD} = V_2 \cos \alpha$

எனவே, $V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \alpha$

$$\therefore \quad V = \sqrt{(V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \alpha)} \quad \ldots \quad \ldots \quad 2.2.$$

மேலும், $\tan \theta = \dfrac{CD}{OD}$

ஆனால் $CD = AC \sin \hat{CAD} = V_2 \sin \alpha$

$OD = OA + AD = V_1 + V_2 \cos \alpha$

எனவே, $$\tan \theta = \frac{V_1 \sin \alpha}{V_1 + V_2 \cos \alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 2.3.$$

V_1, V_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயனான V-ன் எண் மதிப்பு திசை ஆகியவற்றை முறையே சமன் 2.2, 2·3 ஆகியவை தருகின்றன.

சிறப்பு நேர்வுகள் (Special cases)

(i) $\alpha = O$ எனின் ; அதாவது திசை வேகங்கள் ஒரேதிசையில் அமையுமாயின் $V = V_1 + V_2$; $\theta = O$

(ii) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; அதாவது திசை வேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக அமையுமாயின், $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

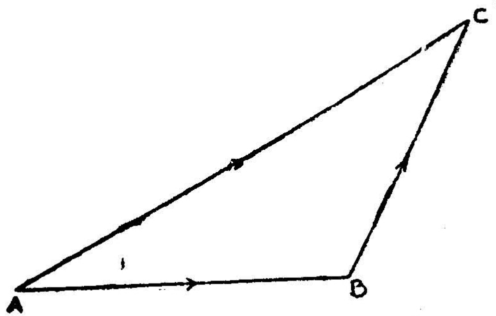
(iii) $\alpha = \pi$; அதாவது திசைவேகங்கள் எதிர்த் திசைகளில் அமையுமாயின், $V = V_1 — V_2$; $\theta = O$

(iv) $V_1 = V_2$ எனின் $V = 2V_1 \cos\frac{\alpha}{2}$; $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

திசைவேக முக்கோணம் (Triangle of velocities): ஒரு துகள் ஒருங்கே பெற்றிருக்கும் இரு திசை வேகங்களின் தொகுபயனைத் திசைவேக முக்கோணத் தத்துவத்தின் அடிப்படையிலும் பெறலாம்.

ஒரு துகளின் இரு திசை வேகங்களைக் குறிக்கும் $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ என்ற வெக்டர்கள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களாக வரிசைச் சுற்றுமுறையில் அமையுமாயின், அம் முக்கோணத்தின் மூன்றுவது பக்கம் (AC) அவற்றின் தொகுபயன் வெக்டரைக் குறிக்கும்.

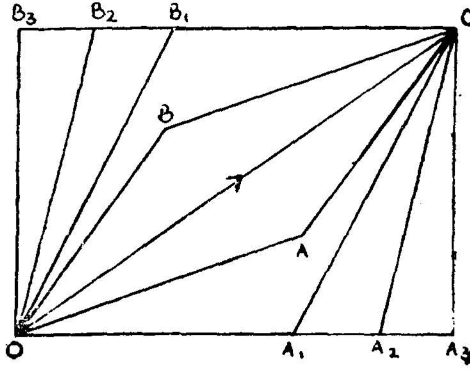
படம் 2·10-ல் $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ என்பன துகளின் இரு திசை வேக வெக்



படம் 2·10.

டர்களைக் குறிக்குமாயின், $\vec{AC}$ அவற்றின் தொகுபயன் வெக்டராகும்

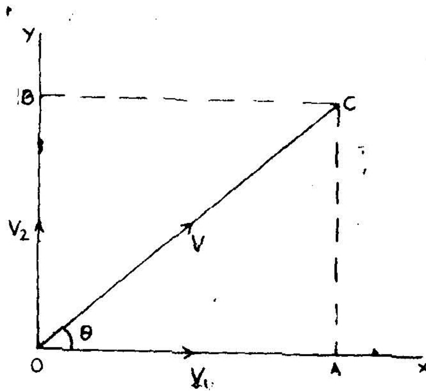
திசை வேகங்களின் பிரிவீடு : ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திசை வேகங்களின் தொகுபயனுன ஒற்றைத் திசைவேகம் ஒன்றை எவ்வாறு காண முடியுமோ அவ்வாறே ஒற்றைத் திசைவேகம் ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளையும் காணலாம். இவ்வாறு ஒற்றைத் திசை வேகம் ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளைக் காண்பதற்குத் திசை வேகங்களின் பிரிவீடு என்று பெயர். ஒரு குறிப்பிட்ட வெக்டரை மூலைவிட்டமாகக்கொண்ட எண் இணைகரங்களை வரையமுடியுமாதலால் [படம் 2·11] ஒரு குறிப்பிட்ட திசை வேகத்தின் ஆக்கக்கூறுகளை



படம் 2·11

எந்த இரு திசைகளில் வேண்டுமானுலும் பெறலாம். எனினும் பொதுவாக ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாகவுள்ள இரு திசைகளில் திசை வேகங்களைப் பிரிப்பது வழக்கம். அவ்வாருயினும் ஒற்றைத் திசை வேகத்திற்கும் ஆக்கக் கூறுகளுள் ஒன்றிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் குறிக்கப்படவேண்டும்.

படம் 2·12-ல் $\vec{OC}$ என்ற வெக்டரால் குறிக்கப்படும் V என்ற திசைவேகத்தை OC-உடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் OX என்ற திசையிலும் அதற்கு நேர்குத்தாயுள்ள OY என்ற திசையிலும் பிரிக்கவேண்டியிருப்பதாகக் கொள்வோம், C-லிருந்து OX-க்கும் OY-க்கும் முறையே OA, OB என்ற குத்துக்கோடுகளை வரையவும். OABC என்பது ஓர் இணைகரமாகும். $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ என்பன முறையே OX, OY திசைகளில் v_1, v_2 என்ற திசை வேகங்களைக் குறிக்குமாயின் திசைவேகங்களின் இணைகரவிதிப்படி v என்பது V_1, V_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயனுகும். எனவே OA, OB என்பவை V-ன் ஆக்கக் கூறுகளாகும்.



படம் 2·12

புடத்திலிருந்து $OA = OC \cos\theta$

அல்லது $V_1 = V \cos\theta$

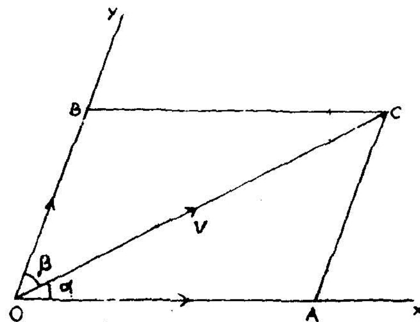
$OB = OC \sin\theta$

அல்லது $V_2 = V \sin\theta$

எனவே V என்ற திசை வேகவெக்டருடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் அதன் ஆக்க கூறு V cos θ ஆகும்; அத் திசைக்கு நேர்குத்தான திசையில் அதன் ஆக்கக்கூறு V sin θ ஆகும்.

அடுத்து திசை வேகம் ஒன்றின் ஏதேனும் இரு திசைகளில் ஆக்கக் கூறுகளைக் காண்போம்.

படம் 2·13ல் OC என்ற கோடு V என்ற வெக்டரின் எண் மதிப்பையும் (V) OX, OY ஆகியவை V என்ற வெக்டருடன் முறையே



படம் 2·13

α, β என்ற கோணங்களை அமைக்கும் திசைகளையும் குறிக்கின்றன

OX, OY ஆகிய திசைகளில் V-ன் ஆக்கக் கூறுகளைக் காண C-லிருந்து CA, CB என்ற கோடுகளை முறையே $\vec{OY}$, $\vec{OX}$ ஆகியவற்றிற்கு இணையாக வரையவும். இனி, OA, OB ஆகியவை OX, OY திசைகளில் V-ன் ஆக்கக் கூறுளாகும். அவற்றின் எண் மதிப்புகள் V_1, V_2 எனக் கொள்வோம்.

படத்தில், $O\hat{A}C = 180 - (\alpha + \beta)$

முக்கோணம் OAC-ல்

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{OC}{\sin\{180-(\alpha+\beta)\}}$$

எனவே $$OA = \frac{OC \sin\beta}{\sin(\alpha \cdot \beta)}$$

அல்லது $$V_1 = OA = \frac{V \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 2.4$$

$$OB = \frac{OC \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

அல்லது $$V_2 = OB = \frac{V \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 2.5$$

மாதிரிக் கணக்கு 1. ஒன்றுக்கொன்று 60° கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள 30 செ.மீ/வி, 50 செ.மீ/வி என்ற இரண்டு திசை வேகங்களின் தொகுபயனைக் காண்க.

இங்கு $V_1 = 30$ செ.மீ/வி

$V_2 = 50$ செ.மீ/வி

$\alpha = 60^\circ$

எனவே, $V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos\alpha$

$= 30^2 + 50^2 + 2 \times 30 \times 50 \times \cos 60$

$= 900 + 2500 + 1500$

$= 4900$

$\therefore \quad V = 70$ செ.மீ./வி

மேலும் தொகுபயன் திசைவேகம் 30 செ.மீ./வி திசைவேகத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்குமாயின்,

$$\tan\theta = \frac{V_2 \sin\alpha}{V_1 + V_2 \cos\alpha}$$

$$= \frac{50 \sin 60}{30 + 50 \cos 60}$$

$$= \frac{25 \times \sqrt{8}}{55} = 0{\cdot}6874$$

$\therefore \quad \theta = 38^\circ\ 13'$

மாதிரிக் கணக்கு 2. 300 அடி அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றின் குறுக்காக ஒரு படகு 6 அடி/வி திசை வேகத்துடன் செலுத்தப் படுகிறது. நீரோட்டத்தின் திசை வேகம் 3 அடி/வி என்றால் படகு எதிர்க்கரையை எங்கு எப்பொழுது அடையும் என்பதைக் கணக் கிடுக.

இங்குப் படகு, இரண்டு திசை வேகங்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒன்று நீரோட்டத்தின் திசை வேகம் 3 அடி/வி., மற்றொன்று ஆற்றின் நீரோட்டத்திற்கு நேர்குத்தான படகின் திசைவேகம், 6 அடி/வி. ஆற்றின் அகலம் 300 அடி ஆகும். ஆற்றின் குறுக்காகப் படகின் திசைவேகம் 6 அடி/விநாடி ஆகும்.

எனவே, ஆற்றைக் கடக்கப் படகு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$$= \frac{300 \text{ அடி}}{6 \text{அடி/வி.}} \quad \text{வி.}$$

இந்த 50 விநாடிக்கால அளவில் படகு நீரோட்டத்தின் திசையின் 50வி × 3அடி/வி = 150 அடி செல்லும்.

எனவே, படகு எதிர்க்கரையை 50 விநாடிகளில் அது புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து நீரோட்டத் திசையில் 150 அடி தொலைவில் எதிர்க் கரையை அடையும்.

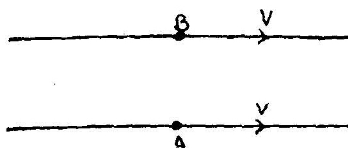
சார்புத் திசைவேகம் (Relative velocity)

நம்மில் பெரும்பாலோர் அனுபவித்திருக்கக்கூடிய ஒரு நிகழ்ச் சியை எடுத்துக்கொள்வோம். நாம் செல்லும் இரயில்வண்டி ஒரு நிலையத்தில் நிற்கிறது. அப்போது மற்றொரு இரயில்வண்டி அந் நிலை யத்திற்கு வந்து, நாம் அமர்ந்துள்ள வண்டிக்குப் பக்கத்தில் நிற் கிறது. அவ் வண்டியில் நடக்கும் ஏதோ ஒரு நிகழ்ச்சியை நம்மை மறந்து கவனித்துக்கொண்டிருக்கிறோம். அப்பொழுது நாம் அமர்ந் திருக்கும் வண்டி புறப்பட்டு, நகர்ந்து செல்வதாக உணர்கிறோம். அவ்வாறு உணரும் நாம் முதலில் நோக்கிக் கொண்டிருந்த திசைக்கு எதிர்த்திசையில் நோக்கும்போது, உண்மையில் நாம் செல்லும் வண்டி நகராமல் இருப்பதைக்கண்டு ஏமாறுகிறோம். இந் நிலையைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம் :

ஒரு பொருள் இயங்குகிறது என்றால் ஒரு நிலையான சுட்டமைப் பைப் பொறுத்தவரை அது தன் நிலையை மாற்றுகிறது எனப்படும் என்று முன்னரே கூறப்பட்டது. நாம் செல்லும் இரயில்வண்டி இயங்கு கிறது என்றால் வண்டிக்கு வெளியேயுள்ள ஒரு நிலையான பொருளைப் (மரம் அல்லது நின்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு பார்வையாளர்) பொறுத்தவரை அது தன் நிலையை மாற்றுகிறது. மேற்கூறிய நிகழ்ச்

சியில் நமது கருத்து மற்ற இரயில் வண்டியிலேயே நிலைத்திருப்பதால், அதனை ஒரு சுட்டமைப்பாகக் கருதுகிறோம். அதனைப் பொறுத்த வரை நமது நிலை மாறுகிறது. எனவேதான் நாம் நகருவதாக உணருகிறோம். ஆனால், எதிர்த்திசையில் நோக்கும்போது அங்குள்ள நிலையான பொருள்களை (மரம் அல்லது விளக்குக் கம்பம் போன்றவை) நோக்குகிறோம். அத்தகைய நிலையான பொருள்களைப் பொறுத்தவரை நமது நிலை மாறுவதில்லை. எனவே, நாம் நகரவில்லை என்பதனை உணருகிறோம்.

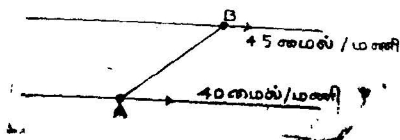
மற்றுமொரு நிகழ்ச்சி: இதனைச் சற்று விஞ்ஞானக் கண்ணோட்டத்துடன் நோக்குவோம். இணையான பாதைகளில் சமமான திசைவேகங்களுடன் செல்லும் இரு இரயில் வண்டிகளில் உள்ள A, B என்ற இருவரைக் கருதுவோம். [படம் 2·14] A என்பவர் தமது



படம் 2·14

கருத்தை B மீது ஊன்றித் தம் நிலையை மறந்து இருப்பாராயின் அவருக்கு B இயங்குவதாகவே தோன்றுது. அதாவது A-ஐப் பொறுத்தவரை B-ன் திசைவேகம் சுழியாகும். AB என்ற கோட்டின் நீளம் மாறுமல் இருக்கும்.

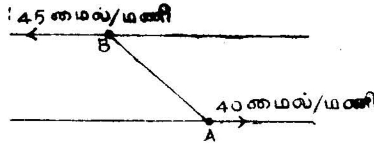
அடுத்து முதல் வண்டி மணிக்கு 40 மைல் வீதமும் இரண்டாவது வண்டி மணிக்கு 45 மைல் வீதமும் ஒரே திசையில் செல்வதாகக் கருதுவோம். இப்போது A என்பவர் அவரைப் பொறுத்தவரை B இயங்குவதாகத் தோன்றும். படம் 2·15-ல் AB-ன் நீளம்



படம் 2·15

பாதைகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவைச் சிறிதாகக் கருதுவோ மாயின்—மணிக்கு 5 மைல் வீதம் அதிகரித்துக்கொண்டே செல்லும். இம் மதிப்பு A-ஐப் பொறுத்தவரை B-ன் சார்புத் திசை வேகமாகும்.

மூன்றுவதாக B மணிக்கு 45 மைல் வீதம் A-ன் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் செல்வதாகக் கொள்வோம் [படம் 2·16.] இப்போது



படம் 2·16

A B-ன் நீளம் A-ன் இயக்கத்திற்கு எதிர்த்திசையில் மணிக்கு 85 மைல் வீதம் அதிகமாகும். எனவே A-ஐப் பொறுத்தவரை B-ன் சார்புத்திசை வேகம் மணிக்கு 85 மைல் ஆகும். அதாவது A-ன் இயக்கத்திற்கு எதிர்த்திசையில் மணிக்கு 85 மைல் ஆகும்.

மேற் சொன்ன மூன்று நிகழ்ச்சிகளிலும் A-ஐ நிலேயானவராகக் கருதி, B-ன் திசைவேகம் கணக்கிடப்படுகிறது. ஆனுல், A, B-ன் திசை வேகங்கள் முறையே மணிக்கு 40 மைல், மணிக்கு 45 மைல் என்னும்போது, அவைகள் இரயில் வண்டிகளுக்கு வெளியே உள்ள நிலேயான பொருளேப் பொறுத்து அளவிடப்பட்டவையாகும்.

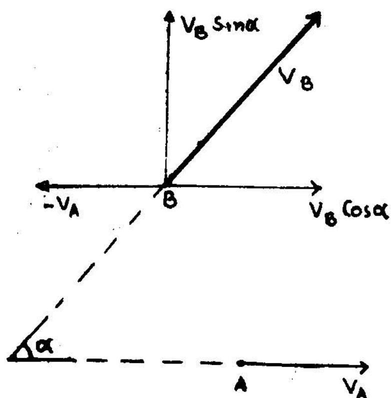
எனவே, ஒரு பொருளின் திசை வேகம் எந்த அமைப்பைச் சுட்ட மைப்பாகக் கொண்டு அளவிடப்படுகிறதோ, அதன் தன்மையைப் பொறுத்தது. சுட்டமைப்பு நிலேயானதாக இருக்கும்போதுதான் பொருளின் கடக்கிடப்பட்ட திசைவேகம் அதன் உண்மையான அல்லது சார்பில்லாத் திசைவேகம் (absolute velocity) ஆகும். அத்தகைய உண்மையான திசைவேகத்தை நாம் காணவே முடியாது. நாம் நிலேயானதெனக் கருதும் சுட்டமைப்புகள் உண்மையில் நிலேயானவையாக இருப்பதில்லே. காட்டாக A-ன் திசைவேகம் நிலேயாக உள்ள பார்வையாளரைப் பொறுத்தவரை மணிக்கு 40 மைல் எனக் கணக்கிட்டோமல்லவா ? அப் பார்வையாளர் உண்மையில் நிலேயானவரா ? இல்லே, அவர் புவிப்பரப்பைப் பொறுத்தவரை நிலேயானவர்தாம். ஆனுல், புவி மண்டலத்திற்கு அப்பால் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து—நிலாவிலிருந்து என்று கொள்வோம்—நோக்கும்போது அவர் புவியோடு சேர்ந்து சுழலுவதைக் காணலாம். இவ்வாறு நிலேயானதெனக் கருதும் ஒரு சுட்டமைப்பை (பொருளே)—அது உண்மையில் இயங்கிக்கொண்டிருந்தாலும்—பொறுத்துக் கணக்கிடப்படும் ஒரு பொருளின் திசைவேகம் அச் சுட்டமைப்பைச் சார்ந்த திசை வேகம் அல்லது சார்புத் திசைவேகம் என அழைக்கிரும்.

இரயில் வண்டிகளைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டுகளில் A-ஐப் பொறுத்த B-ன் திசைவேகமானது, அதன் திசை வேகத்துடன் A-ன் திசைவேகத்திற்குச் சமமான ஆனால் எதிர்த்திசையில் உள்ள திசை வேகம் ஒன்றைச் சேர்ப்பதன்மூலம் கிடைக்கப்பெறுகிறது என்பதனைக் காணலாம். எனவே, சார்புத்திசை வேகத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம் :

A, B என்ற இரு துகள்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு திசை அல்லது இவையிரண்டும் மாறுமாயின், ஒவ்வொரு துகளும் மற்றதைப் பொறுத்தவரை ஒரு சார்புத்திசை வேகத்தைக் கொண்டுள்ளது என்று கூறப்படும். A-ஐப் பொறுத்த B-ன் சார்புத் திசை வேகமானது, B-ன் திசைவேகத்துடன் A-ன் திசைவேகத்திற்குச் சமமான ஆனால் எதிர்த்திசையில் செயற்படும் திசை வேகத்தைச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் திசைவேகத்திற்குச் சமமாகும்.

இனி ஒரு துகளைப் பொறுத்த மற்றொரு துகளின் சார்புத் திசை வேகத்தை எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்று காண்போம்.

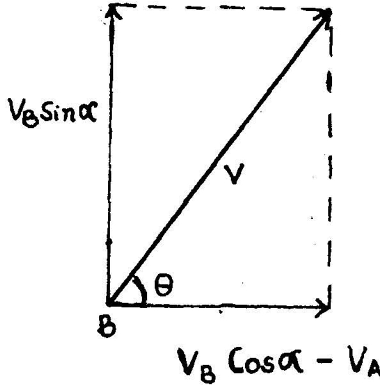
A, B என்ற இரு துகள்கள் ஒன்றுக்கொன்று α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள திசைகளில் முறையே V_A, V_B என்ற திசை வேகங்களில் இயங்குவதாகக் கொள்வோம் [படம் 2·17a]. A-ஐப்



படம் 2·17 A

பொறுத்த B-ன் சார்புத் திசை வேகத்தைக் காண V_B வுடன் V_A என்ற திசை வேகத்தைச் சேர்க்கவேண்டும். இதனைப் பின்வருமாறு செய்யலாம்.

B-ன் திசை வேகத்தை A-ன் இயக்கத்திற்கு இணையான திசையிலும் அதற்கு நேர்குத்தான திசையிலும் முறையே $V_B \cos\alpha$, V_B



படம் 2·17 B.

$\sin\alpha$ என இரு ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். இனி, $V_B.\cos\alpha$ உடன் V_A ஐச் சேர்ப்போமாயின் B-ன் சார்புத்திசை வேகத்தின் A-ன் இயக்கத் திசையில் உள்ள $V_B \cos\alpha - V_A$ என்ற ஆக்கக் கூறையும் அதற்கு நேர்குத்தான திசையில் $V_B \sin\alpha$ என்ற ஆக்கக் கூறையும் பெறலாம். [படம் 2·17 b]. இவ்விரு ஆக்கக் கூறுகளின் தொகுபயனை B-ன் சார்புத் திசை வேகத்தை V எனக் குறிப்பிடுவோமாயின்,

$$V^2 = (V_B \cos\alpha - V_A)^2 + V_B^2 \sin^2\alpha$$
$$= V_A^2 + V_B^2 - 2V_A V_B \cos\alpha$$

எனவே, $V = \sqrt{(V_A^2 + V_B^2 - 2V_A V_B \cos\alpha)}$ ………2·6

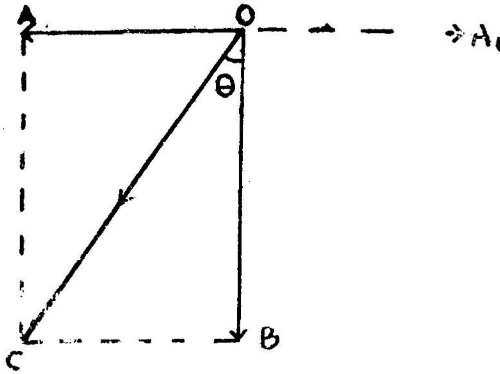
மேலும், B-ன் சார்புத் திசை வேகம் A-ன் இயக்கத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்குமாயின் [படம் 2·17b]

$$\tan\theta = \frac{V_B \sin\alpha}{V_B \cos\alpha - V_A} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \; 2·7$$

மாதிரிக் கணக்கு 3. மழையில் குடையின் உதவியுடன் ஒருவர் மிதிவண்டியில் மணிக்கு 8 கிலோ மீட்டர் வீதம் சென்றுகொண்டிருக்கிறார். மழைத் துளிகள் மணிக்கு 10 கி. மீ. வீதம் செங்குத்தாக விழுந்து கொண்டிருக்கின்றன. மழைத்துளிகள் குடையின் உச்சியை நேர்குத்தாகத்தாக்கவேண்டுமாயின் அவர் குடையை எத் திசையில் சாய்த்துப் பிடிக்கவேண்டும்?

இங்கு அவர், அவரைப் பொறுத்த மழைத்துளிகளின் சார்புத்திசை வேகத்தின் திசையில் குடையைச் சாய்த்துப் பிடிக்க வேண்டும்.

படம் 2·18-ல் $\overrightarrow{OB}$ மழைத் துளியின் திசை வேகத்தையும் $\overrightarrow{OA_1}$ மனிதரின் திசை வேகத்தையும் குறிக்கின்றன. $\overrightarrow{OB}$-உடன் $\overrightarrow{OA}$ $(= -\overrightarrow{OA_1})$ என்ற வெக்டரைத் தொகுத்துக் கிடைக்கப்பெறும் $\overrightarrow{OC}$ அவற்றின் தொகுபயனைக் குறிக்கும்.



படம் 2·18

இங்கு OA = 8 கி. மீ./மணி

OB = 10 கி. மீ./ம.

$\alpha = B\hat{O}A = 90^\circ$

படம் 2·18-ல் $B\hat{O}C$ θ என்றால்

$$\tan\theta = \frac{BC}{OB} = \frac{8}{10} = 0{\cdot}8$$

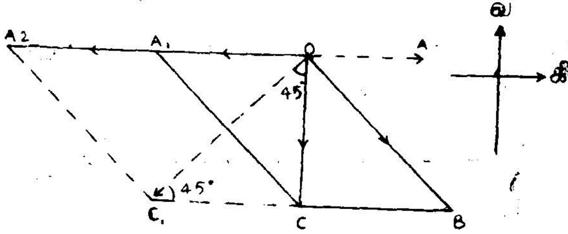
$$\therefore \quad \theta = 38^\circ\ 39'$$

எனவே, குடையைச் செங்குத்து நிலைக்கு 38° 39′ கோணத்தில் சாய்த்துப் பிடிக்கவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 4. கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 3 கி.மீ. வீதம் செல்லும் ஒரு மனிதன் வடக்கிலிருந்து காற்று வீசுவதாக உணரு

கிறான். அவனுடைய வேகத்தை மணிக்கு 6 கி. மீ. வீதம் அதிகரிக்கும்போது, காற்று வடகிழக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. காற்றின் உண்மையான திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

இங்கு மனிதனைப் பொறுத்த காற்றின் சார்புத் திசை வேகங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 2·19

படம் 2·19-ல் OA-மனிதனின் இயக்கத் திசை ;

$\vec{OA_1}$-முதலில் மனிதனின் திசை வேகத்திற்கு சமமான, எதிரான திசை வேகத்தைக் குறிக்கும் வெக்டர் ; OA_1 = மணிக்கு 3 கி. மீ. $\vec{OA_2}$-பின்னர் மனிதனின் திசை வேகத்திற்குச் சமமான, எதிரான திசை வேகத்தைக் குறிக்கும் வெக்டர் ;

OA_2 = மணிக்கு 6 கி. மீ. $\vec{OB}$-காற்றின் உண்மையான திசை வேக வெக்டர்

$\vec{OC}$, $\vec{OC_1}$ என்பவை காற்றின் சார்புத் திசை வேக வெக்டர்கள்.

$$C_1\hat{O}C = 45^\circ$$

படத்தில் $C\hat{O}B = \theta$ எனில் $\triangle OCB$-ல் முக்கோண விதிப்படி

$$\frac{OB}{\sin 90} = \frac{BC}{\sin\theta} = \frac{3}{\sin\theta} \quad [\because BC = OA_1]$$

$$\therefore \quad OB = \frac{3}{\sin\theta} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

$\triangle$ OC_1B-ல்

$$\frac{OB}{\sin 45} = \frac{BC_1}{\sin(45+\theta)} = \frac{6}{\sin(45+\theta)}$$

$$\therefore \quad OB = \frac{6 \sin 45}{\sin(45+\theta)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

சமன் (i), (ii)—லிருந்து

$$\frac{3}{\sin\theta} = \frac{6 \sin 45}{\sin(45+\theta)}$$

அல்லது $\sin(45+\theta) = 2 \sin 45 \sin\theta$

அதாவது, $\sin 45 \cos\theta + \cos 45 \sin\theta = 2 \sin 45 \sin\theta$

ஆனால், $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

எனவே, $\cos\theta + \sin\theta = 2 \sin\theta$

அல்லது $\cos\theta = \sin\theta$

$\therefore \quad \theta = 45°$

மேலும், சமன் (i) லிருந்து

$$OB = \frac{3}{\sin 45} = 3.\sqrt{2} \text{ கி. மீ./மணி.}$$

எனவே, காற்றின் உண்மையான திசை வேகம் தென் கிழக்காக மணிக்கு 3. $\sqrt{2}$ கி. மீ. ஆகும்.

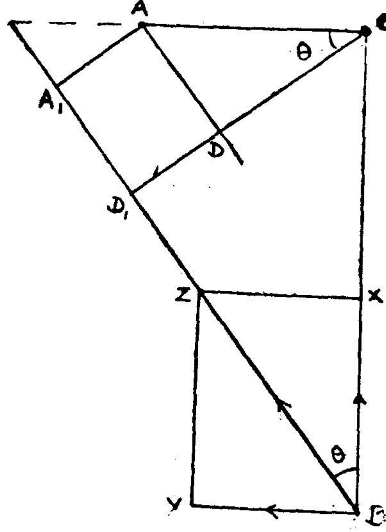
மாதிரிக் கணக்கு 5. ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக அமைந்த இரு சாலைகளில் அவற்றின் சந்திப்பாகிய C என்ற புள்ளியை நோக்கி A, B என்ற இரு கார்கள் முறையே மணிக்கு 21 கி. மீ., 28 கி. மீ சீரான திசை வேகங்களுடன் சென்றுகொண்டிருக்கின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் $AC = \frac{1}{2}$ கி. மீ. $BC = \frac{3}{4}$ கி. மீ. எனின் அவற்றிற்கிடையே இருக்கக்கூடிய மிகக் குறுகிய தொலைவு என்ன ?

படம் 2·20-ல் AC, BC என்பவை ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாயுள்ள இரு சாலைகளையும் A, B என்பன அவற்றில் கார்களின் நிலையையும் குறிக்கின்றன.

$AC = \frac{1}{2}$ கி. மீ; $BC = \frac{3}{4}$ கி. மீ.

A-ஐப் பொறுத்த B-ன் சார்புத்திசை வேகத்தைக் கண்டு A-விருந்து அத்திசைக்குள்ள மிகக் குறுகிய தொலைவைக் கணக்கிட்டோமாயின் இக் கணக்கிற்குரிய விடை கிடைக்கும்.

A-ஐப் பொறுத்த B-ன் சார்புத் திசை வேகத்தைக் காண A-ன் திசை வேகத்திற்குச் சமமான எதிரான திசை வேகத்தை B-ன் திசை வேகத்துடன் இணைத்துத் தொகுபயன் திசை வேகத்தைக் காண



படம் 2·20

படத்தில் $\overrightarrow{BX}$ என்பது B-ன் திசை வேகத்தையும் $\overrightarrow{BY}$ என்பது A-ன் திசை வேகத்திற்குச் சமமான எதிரான திசை வேகத்தையும் குறிக்குமாயின் $\overrightarrow{BZ}$, B-ன் சார்புத் திசை வேகத்தைக் குறிக்கும்.

BY = 21 கி. மீ./ம.

BX = 28 கி. மீ./ம.

எனவே $BZ = \sqrt{28^2+21^2} = 35$ கி. மீ/ம.

மேலும் $\tan\theta = \frac{BY}{BX} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

எனவே $\sin\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$

இனி, A-லிருந்து BZ-க்கு வரையப்பட்டு நேர்குத்துக்கோடு குறிக்கும் தொலைவு A-க்கும் B-க்கும் இடையே இருக்கக்கூடிய மிகக் குறுகிய தொலைவாகும்.

C-யிலிருந்து BZ-க்கு CD_1 என்ற குத்துக்கோட்டையும் CD_1-ஐ D-ல் சந்திக்குமாறு A-விருந்து BZ-க்கு இணையான ஒரு கோட்டையும் வரைவோமாயின்,

$$AA_1 = DD_1$$
$$= CD_1 - CD$$

ஆனால், $DC_1 = BC \sin\theta = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ கி.மீ.

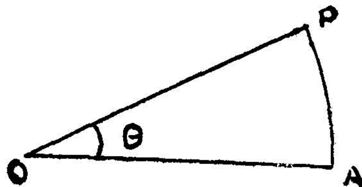
$CD = AC\cos\theta = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ கி.மீ.

$\therefore \; AA_1 = \frac{9}{20} - \frac{2}{5} = \frac{1}{20}$ கி.மீ.

எனவே, A, B என்ற கார்களுக்கிடையே இருக்கக்கூடிய மிகக் குறுகிய தொலைவு $\frac{1}{20}$ கி.மீ. ஆகும்.

கோணத்திசை வேகம் (Angular velocity)

O என்ற நிலையான புள்ளியையும் OA என்ற நிலையான கோட்டையும் கொண்ட ஒரு தளத்தில் P என்ற துகள் இயங்குமாயின்



படம் 2·21

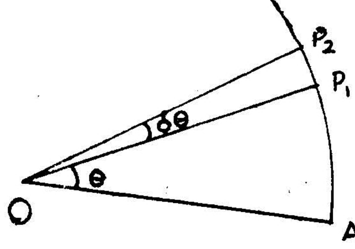
[படம் 2·21] நேரத்தைப் பொறுத்துக் கோணம் $\widehat{AOP}$ அதிகரிக்கும் வீதம் அத் துகளின் O என்ற புள்ளியைப்பற்றிய கோணத்திசை வேகம் எனப்படும்.

P, சீராக இயங்குமாயின் t விநாடிகளில் OP விளைவிக்கும் கோணம் θ ரேடியன்கள் என்றால் O-ஐப்பற்றிய கோணத்திசை வேகம்

$$W = \frac{\theta}{t} \text{ ரேடியன்கள்/விநாடி} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 2\cdot$$

P-ன் இயக்கம் சீரானதாக இல்லாவிடில் அதன் கோணத்திசை வேகத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம் :

படம் 2·22-ல் துகள் t என்ற கணத்தில் P_1 என்ற நிலையிலும் அதையடுத்த δt என்ற நேர இறுதியில் P_2 என்ற நிலையிலும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.



படம் 2·22

இனி, δt-ன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது $\frac{\delta\theta}{\delta t}$ -ன் அணுக்க மதிப்பு t என்ற கணத்தில் துகளின் O-ஐப்பற்றிய கோணத்திசை வேகத்தைக் கொடுக்கும். அதாவது,

$$w = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad 2\cdot9$$

கோணத்திசை வேகமும் நேர்க்கோட்டியல் திசை வேகமும் :

O என்ற மையத்தையும் r என்ற ஆரத்தையும் கொண்ட வட்டத்தின் வழியே P என்ற ஒரு துகள் V என்ற சீரான வேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கொள்வோம். மையத்தைப்பொறுத்து அதன் கோணத் திசை வேகம் w எனக் கொள்வோம்.

இனி, t என்ற குறுகிய கால அளவில் துகள் PP_1 என்ற வட்ட வில்லைக் கடக்குமாயின்,

$$PP_1 = V \times t$$

மேலும், $PP_1 = \times \widehat{POP_1}$

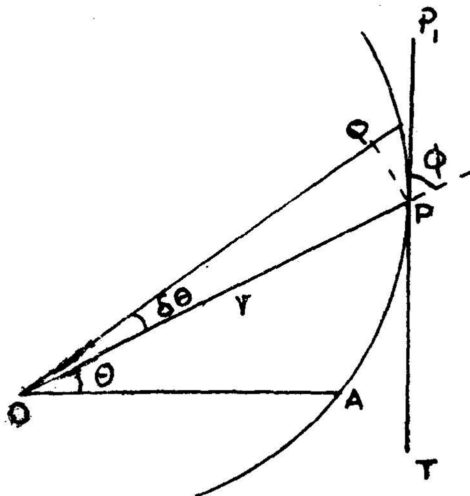
ஆனால், $\widehat{POP_1} = w \times t$ ரேடியன்கள்

எனவே, $Vt = r\,wt$

அதாவது, $V = r\,w$

அல்லது $w = \frac{V}{r}$ $\Big\}$ ....2·10

வளைகோடு ஒன்றின் வழியே செல்லும் துகளின் கோணத் திசைவேகம் : வளைகோடு O என்ற நிலையான புள்ளியையும் OA



படம் 2·23

என்ற நிலையான கோட்டையும் கொண்ட ஒரு தளத்தில் அமைந்திருப்பதாகவும் [படம் 2·23] P, P_1 என்பவை முறையே t, $t+\delta t$ என்ற கணங்களில் துகளின் நிலைகளைக் குறிப்பதாகவும் கொள்வோம். PT என்பது P என்ற புள்ளியில் வளைகோட்டிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு.

$$\hat{AOP} = \theta$$

$$\hat{POP_1} = \delta\theta$$

வில் $AP = S$

வில் $AP_1 = S+\delta S$ என இருக்கட்டும்.

t என்ற கணத்தில் துகளின் திசைவேகம் V என்றால்,

$$V = \frac{ds}{dt}$$

துகளின் கோணத் திசைவேகம்

$$w = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{ds}{dt} = V\frac{d\theta}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots 2{\cdot}11$$

படம் 2·21-ல்

$\widehat{OPT} = \phi$ எனின்,

$P\phi = r d\theta = PP_1 \sin\phi = ds \sin\phi$

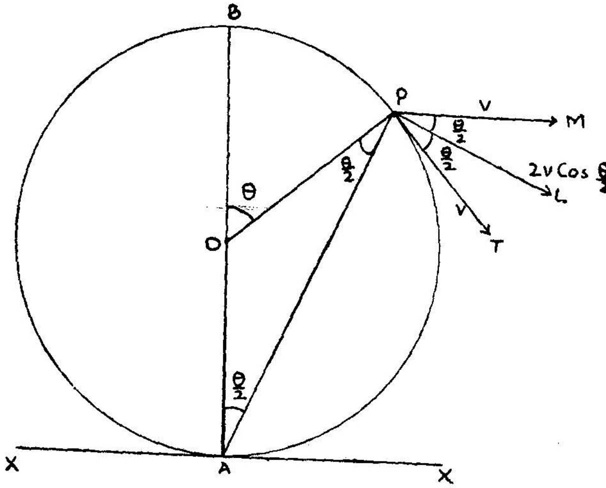
$\therefore ds \sin\phi = r\, d\theta$

அல்லது $\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\phi}{r}$

எனவே, சமன்பாடு 2·11-லிருந்து

$$w = \frac{V \sin\phi}{r}$$

ஒரு தளத்தின்மீது நழுவிச்செல்லாமல் உருளும் சக்கரத்தின் விளிம்பில் உள்ள புள்ளியின் கோணத்திசை வேகம் : படம் 2·24-ல் X X என்பது ஒரு தளத்தையும் O, சக்கரத்தின் மையத்தையும் A,



படம் 2·24

சக்கரம் தளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் புள்ளியையும் குறிக்கின்றன. P என்பது சக்கரத்தின் விளிம்பின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளி. சக்கரம் அதன் மையத்தைப்பற்றிச் சுழலும்போது அதன் மையம் V என்ற திசைவேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

சக்கரத்தின் மையம் சக்கரத்தின் பரிதிக்குச் சமமான தொலைவைக் கடக்கும் அதே நேரத்தில் சக்கர விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி

(P) ஒரு முறை சழலுகிறது; அதாவது பரிதிக்குச் சமமான தொலை வைக் கடக்கிறது. எனவே, சக்கரத்தின் மையத்தைப்பொறுத்து P-ன் திசைவேகம் சக்கர மையத்தின் திசைவேகத்திற்குச் (V சமமாகும்.

படத்தில் $\widehat{POB} = \theta$ என இருக்கட்டும். P என்ற புள்ளியைக் கருதுவோமாயின் அதற்கு ஒவ்வொன்றும் V க்குச் சமமான இரண்டு திசைவேகங்கள் உள்ளன. ஒன்று P ல் விளிம்பிற்கு வரையப்பட்ட தொடு கோட்டின் (PT) வழியே செயற்படுகிறது: மற்றது சக்கர மையத்தின் இயக்கத்திற்கு இணையான திசையில் (PM) செயற்படுகிறது.

PT, PM கோடுகள் முறையே, OP, OB ஆகியவற்றிற்கு நேர்குத்துக் கோடுகளாதலால் $\widehat{MPT} = 90°$.

எனவே, P ன் இருதிசை வேகங்களின் தொகுபயன் $= 2V \cos\frac{\theta}{2}$ அது $\widehat{MPT}$-ன் இருசமவெட்டியான PL வழியே செயற்படும்.

மேலும் $\widehat{OPT} = 90°$; $\widehat{OPA} = \frac{\theta}{2}$ ஆதலால், $\widehat{APL} = 90°$

எனவே, P-ன் தொகுபயன் திசைவேகம் AP-க்கு நேர்குத்துக் கோடான PL வழியே செயற்படுகிறது. அதாவது, P, A-ஐப் பற்றிச் சுழலுகிறது. P-ன் A-ஐப்பற்றிய கோணத்திசைவேகம்.

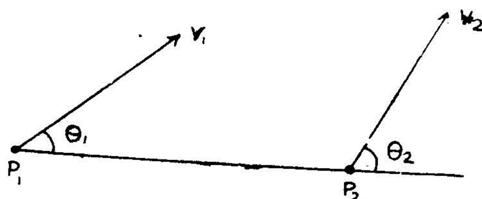
$$= \frac{2V \cos\frac{\theta}{2}}{AP} = \frac{V \cos\frac{\theta}{2}}{2r\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{V}{r}$$

மேலும் $\frac{V}{r}$ என்பது சக்கரத்தின் சக்கர மையத்தைப்பற்றிய கோணத் திசைவேகமாகும். எனவே. சக்கர விளிம்பில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் சக்கரம் தளத்தைத் தொடும் புள்ளியைப்பற்றி ஒரு கோணத் திசை வேகத்தைப் பெற்றுள்ளது. அக் கோணத்திசை வேகத்தின் அளவு சக்கர மையத்தைப்பற்றிச் சக்கரம் கொண்டுள்ள கோணத் திசை வேகத்திற்குச் சமமாகும்.

மேலும், சக்கரம் தளத்தைத் தொடும் புள்ளியாகிய A-ன் திசை வேகத்தைக் கருதுவோமாயின், அதன் திசை வேகம் சுழியாகும்.

எனவே, அப் புள்ளி கணநேரத்திற்கு ஓய்வில் உள்ளது. அப் புள்ளி கணநேரத் தொடு புள்ளி (instantaneous point of contact) எனப் படும். சக்கரத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் திசை வேகம் 2V ஆகும்.

இயங்கும் இரு துகள்களுக்கிடையேயுள்ள சார்பு கோணத் திசை வேகம் (Relative angular velocity): இரு துகள்கள் இருவேறு திசை களில் மாறுபட்ட திசை வேகங்களுடன் இயங்குமாயின், அவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் மற்றதைப் பொறுத்த சார்பு கோணத் திசை வேகத் தைப் பெற்றிருக்கும். இதனைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம் :



படம் 2·25

படம் 2·25:ல் P_1, P_2 என்பன, துகள்களின் கணநேர நிலைகளும் முறையே V_1, V_2 என்பன அவற்றின் திசை வேகங்களும் ஆகும். V_1, V_2 என்ற திசை வேகங்கள் துகள்களின் கணநேர நிலைகளை இணைக்கும் P_1P_2 என்ற கோட்டுடன் முறையே θ_1, θ_2 என்ற கோணங்களை அமைப்பதாகக் கொள்வோம்.

இனி, V_1, V_2 ஆகியவற்றை $P_1 P_2$ திசையிலும் அதற்கு நேர்குத்தான திசையிலும் பிரிப்போமாயின், $P_1 P_2$ வழியே செயற் படும் அவற்றின் ஆக்கக் கூறுகள் P_1P_2-ல் எவ்வித சுழற்று விளை வையும் ஏற்படுத்தமாட்டா. ஆனல், P_1P_2 க்கு நேர்குத்துத் திசையில் செயற்படும் ஆக்கக் கூறுகள் P_1P_2-ல் ஒரு சுழற்று விளைவை ஏற்படுத்தும். அச் சுழற்று விளைவு P_1P_2-க்கு நேர்குத்துத் திசையில் துகள்களின் சார்புத் திசை வேகத்தையும் P_1P_2-ன் நீளத் தையும் பொறுத்ததாகும். அதாவது P_1ஐப் பொறுத்து P_2-ன் சார்புகோணத் திசை வேகம்.

$$= \frac{P_1P_2\text{க்கு நேர்குத்துத் திசையில் } P_1\text{-ஐப் பொறுத்து } P_2\text{-ன் சார்புத் திசை வேகம்}}{P_1P_2}$$

$$= \frac{V_2 \sin \theta_2 - V_1 \sin \theta_1}{P_1P_2}$$

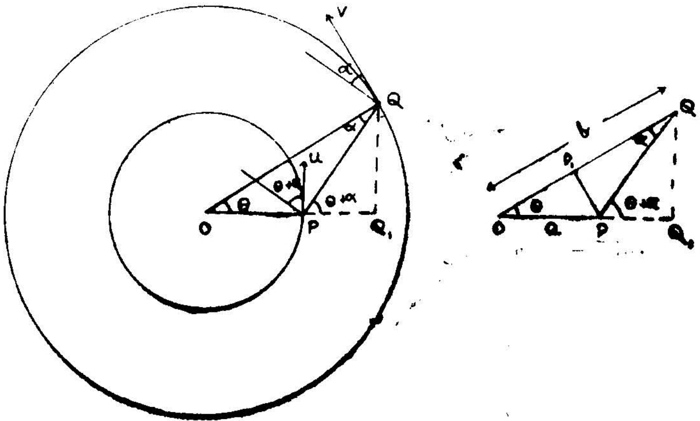
சிறப்பு நேர்வுகள் :

$V_1 \sin \theta_1 = V_2 \sin \theta_2$ எனின் P_1-ஐப் பொறுத்து P_2-ன் சார்பு கோணத்திசை வேகம் சுழியாகும். எனவே, P_1P_2 அதற்கு இணையான திசையிலேயே நகரும். அதாவது, P_2-ன் சார்புத்திசை வேகம் P_1P_2 வழியே செயற்படும்.

மாதிரிக் கணக்கு 6. P, Q என்ற இரு துகள்கள் முறையே a, b என்ற ஆரங்களையுடைய பொது மையமுடைய இரு வட்டங்களில் முறையே u, v என்ற சீரான வேகங்களுடன் ஒரே போக்கில் இயங்குகின்றன. PQ என்ற கோடு வட்டங்களின் மையத்தில் $\cos \theta = \dfrac{au+bv}{av+bu}$ என்னும் கோணத்தைத் தாங்கும்போது அவற்றுள் ஒன்றின் மற்றதைப் பொறுத்த சார்புத் திசை வேகம் சுழியாகும் என நிறுவுக.

P-ஐப் பொறுத்து Q-ன் சார்புகோணத் திசை வேகம் சுழியாக வேண்டுமாயின், PQ-க்கு நேர்குத்துத் திசையில், P-ஐப் பொறுத்து Q-ன் சார்புத் திசை வேகம் சுழியாக வேண்டும்.

படம் 2·26-ல் PQக்கு நேர்குத்துத் திசையில்



படம் 2·26

$$\text{V-ன் ஆக்கக் கூறு} = V \cos \alpha$$
$$\text{U-ன் ஆக்கக் கூறு} = U \cos(\theta + \alpha)$$

எனவே, $V \cos \alpha - U \cos(\theta + \alpha) = 0$

PP_1, QQ_1 என்பவை முறையே OQ, OP-க்கு வரையப்பட்ட நேர்குத்துக் கோடுகளாயின்,

$$\cos \alpha = \frac{QP_1}{PQ} = \frac{b - a \cos\theta}{PQ}$$

$$\cos(\theta + \alpha) = \frac{PQ_1}{PQ} = \frac{b \cos\theta - a}{Q}$$

$$\therefore \; V.\frac{b - a \cos\theta}{PQ} - u.\frac{b \cos\theta - a}{PQ} = O$$

அதாவது, $V.b - Va\cos\theta = u\,b\cos\theta - ua$

அல்லது $\cos\theta\,(b.u + av) = vb + ua.$

$$\cos\theta = \frac{au + bv}{av = bu}$$

எனவே, $\cos\theta = \frac{au + bv}{av + bu}$ என்னும்போது P-ஐப் பொறுத்து Q-யின் சார்பு கோணத்திசை வேகம் சுழியாகும்.

முடுக்கம் (Acceleration)

ஒரு துகளின் திசைவேகம் அதன் எண் மதிப்பிலோ அல்லது திசையிலோ அல்லது இரண்டிலுமோ மாறுபடுமாயின் அது முடுக்கம் பெற்றுள்ளது என்று கூறப்படும்.

இயங்கும் துகள் ஒன்றின் திசை வேகமாறுபாட்டு — நேர வீதம் அத் துகளின் முடுக்கம் எனப்படும்.

முடுக்கமும் ஒரு வெக்டரேயாகும்.

ஒரு துகளின் முடுக்கம் நேர் குறியுடையதாகவோ எதிர் குறியுடையதாகவோ இருக்கும். துகளின் திசை வேகம் அதிகமாகும் போது முடுக்கம் நேர் குறியுடையதாகவும் திசைவேகம் குறையும் போது, முடுக்கம் எதிர் குறியுடையதாகவும் இருக்கும். எதிர் குறியுடைய முடுக்கம் எதிர் முடுக்கம் (retardation) எனப்பெறும்.

சீரான முடுக்கம் : ஓர் இயங்கும் துகளின் திசை வேகம் சம கால அளவுகளில் — அக் கால அளவுகள் எவ்வளவு சிறியனவாயிருப்பினும் — சம அளவு மாறுபடுமாயின், அத் துகள் சீரான முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது எனக் கூறப்படும்.

முடுக்கம் சீரானதாக இருக்கும்போது, துகளின் திசை வேகத்தில் ஓரலகு நேரத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டை அதன் முடுக்கம் என அளவிடுகிறோம்.

முடுக்கம் மாறுபடும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் துகளின் காலத்தைப்பொறுத்த சராசரி முடுக்கத்தையோ எந்தவொரு கணத்தில் அதன் முடுக்கத்தையோ கணக்கிடலாம்.

சராசரி முடுக்கம் : ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் துகளின் சராசரி முடுக்கம் என்பது அதே கால இடைவெளியில் துகளின் திசை வேகத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டை விளைவிக்கக் கூடிய சீரான முடுக்கம் ஆகும். அதாவது, அக் கால இடைவெளியில் துகளின் திசை வேகத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டிற்கும் அக் கால இடைவெளிக்கும் உள்ள தகவு ஆகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் முடுக்கம் ; ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் முடுக்கம் அக் கணத்தை உள்ளடக்கிய மிகமிகக் குறுகிய கால இடைவெளியில் துகளின் திசை வேக மாறுபாட்டிற்கும் அக் கால இடைவெளிக்கும் — அதன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது — உள்ள தகவு ஆகும்.

t, $t+\delta t$ என்ற கணங்களில் துகளின் திசை வேகங்கள் முறையே, v, $v+\delta v$ என்றால், வகை நுண்கணித முறைப்படி

$$\text{துகளின் முடுக்கம் } (a) = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}$$

முடுக்கத்தின் அலகு மெட்ரிக்முறையில் செ.மீ./வி/வி அல்லது செ.மீ/வி^{2}; பிரிட்டன் முறையில் அடி/வி/வி, அல்லது அடி/வி^{2} ஆகும்.

முடுக்கம் ஒரு வெக்டராதலால் இடப் பெயர்ச்சி, திசை வேகம் ஆகியவற்றிற்குக் கையாண்ட அதே முறைகளில் முடுக்கங்களின் தொகுபயனைக் காணவோ அல்லது அவற்றைப் பிரிக்கவோ முடியும்.

இயக்கவியல் சமன்பாடுகள் (Equations of motion)

இச் சமன்பாடுகள் சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் துகள் ஒன்றின் தொடக்கத் திசை வேகம் (u), இறுதித் திசை வேகம் (v), திசை வேக மாறுபாட்டிற்கு எடுத்துக்கொண்ட கால அளவு (t), முடுக்கம் (a), இடப் பெயர்ச்சி (s) ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள வெவ்வேறு தொடர்புகளைக் கொடுக்கின்றன.

முதற் சமன்பாடு : $v=u+at$

சீரான முடுக்கத்துடன் (a) ஒரே நேர்க்கோட்டில் செல்லும் ஒரு துகளை எடுத்துக்கொள்வோம். அதன் திசை வேகம் தொடக்

கத்தில் u ஆகவும் t விநாடிகளின் இறுதியில் v ஆகவும் இருக்கட்டும்.

முடுக்கம் சீரானதாகையால், துகளின் திசை வேகத்தில் ஓரலகு நேரத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடு முடுக்கமாதலால்,

முடுக்கம் $a = \frac{v-u}{t}$

அல்லது $v-u = at$

அதாவது, $v = u+at$ 2.12

இரண்டாவது சமன்பாடு : $S = ut+\frac{1}{2}at^2$

ஒரு துகள் u என்ற திசை வேகத்துடன் தொடங்கி, Q என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் t விநாடிகள் செல்வதாகக் கொள்வோம். t விநாடிகளின் இறுதியில் அதன் இடப்பெயர்ச்சி s ஆகவும் திசை வேகம் v ஆகவும் இருக்கட்டும்.

இங்குத் துகளின் சராசரித் திசை வேகம் $\frac{u+v}{2}$ எனப் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

தொடக்கத்திலிருந்து ஒரு விநாடியின் இறுதியில் துகளின் திசை வேகம் $= u+a$

$(t-1)$ விநாடிகளின் இறுதியில் திசைவேகம் $v-a$

இவ் விரு கணங்களில் உள்ள திசை வேகங்களின் சராசரி

$$= \frac{u+a+v-a}{2}$$

$$= \frac{u+v}{2}$$

தொடக்கத்திலிருந்து 2 விநாடிகளின் இறுதியில் திசைவேகம்

$$= u+2a$$

$(t-2)$ விநாடிகளின் இறுதியில் திசைவேகம் $= v-2a$.

இவ் விரு கணங்களில் உள்ள திசை வேகங்களின் சராசரி

$$= \frac{u+2a+v-2a}{2}$$

$$= \frac{u+v}{2}$$

இவ்வாறாக t கால அளவைத் தொடக்கத்திலிருந்தும், இறுதியிலிருந்தும் சம கால அளவுகளில் உள்ள சோடிக் கணங்களாகப்

பிரித்தோமாயின், ஒவ்வொரு சோடிக் கணங்களுக்கும் சராசரித் திசை வேகம் $\frac{u+v}{2}$ என்பதைக் காணலாம். எனவே, துகள் இயங்கும் t கால முழுவதிற்கும் சராசரித் திசை வேகம் $= \frac{u+v}{2}$

மேலும், சராசரித் திசை வேகத்தின் வரையறையின்படி

$$\text{சராசரித் திசை வேகம்} = \frac{\text{மொத்த இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{எடுத்துக் கொண்ட நேரம்}}$$

$$= \frac{s}{t}$$

எனவே, $$S = \left(\frac{u+v}{2}\right) t$$

ஆனால், $$V = u+at$$

$$\therefore \quad S = \left(\frac{u+u+at}{2}\right) t$$

$$S = ut+\tfrac{1}{2}at^2 \qquad \ldots \ldots 2{\cdot}13$$

மூன்றாவது சமன்பாடு : $v^2=u^2+2as$

ஒரு துகள் u என்ற திசை வேகத்துடன் தொடங்கி Q என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் t வினாடிகள் செல்வதாகக் கொள்வோம். t விநாடிகளின் இறுதியில் அதன் இடப் பெயர்ச்சி, S ஆகவும் திசை வேகம் V ஆகவும் இருக்கட்டும்.

முடுக்கத்திற்கான வரையறையின்படி $a = \frac{v-u}{t}$

முடுக்கம் சீரானதாகையால்

இடப் பெயர்ச்சி $s = \frac{v+u}{2}.t$

மேற்கண்ட இரு சமன்பாடுகளையும் பெருக்கினால்,

$$as = v^2-u^2$$

$$\therefore \quad v^2 = u^2+2as \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots 2{\cdot}14$$

நுண்கணித முறை (Calculus method) : சமன்பாடுகள் 2·12, 2·13, 2·14 ஆகியவற்றை நுண்கணித முறையிலும் பின்வருமாறு பெறலாம்.

முதல் சமன்பாடு: இம் முறையில் முடுக்கத்திற்கான வரையறையின்படி,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

எனவே, $dv = adt$

தொகுதி காணின் (Integrating)

$V=at+c$, c என்பது தொகுதியாக்க மாறிலி t, சுழியாகும் போது $v=u$. இந்த நிபந்தனையைப் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$u = o + c$$

$\therefore$ $C = u$

எனவே, $V = u+at$

இரண்டாவது சமன்பாடு: திசை வேகத்தின் வரையறையின்படி,

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$\therefore$ $ds = vdt$

ஆனல். $V = u+at$

எனவே, $ds = (u+at)\,dt = udt+atdt$

தொகுதி காணின்

$S=ut+\frac{1}{2}at^2+C$. C என்பது மாறிலி t, சுழியாகும்போது $S=O$; எனவே $C=O$

$\therefore$ $S=ut+\frac{1}{2}at^2$.

மூன்றாவது சமன்பாடு: முடுக்கத்திற்கான வரையறையின்படி

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

$$= V\frac{dv}{ds} \left[\because V = \frac{ds}{dt}\right]$$

அல்லது $vdv=ads$

தொகுதி காணின்

$\frac{V^2}{2} = as+C$. C என்பது மாறிலி t, சுழியாகும்போது, $V=u$;

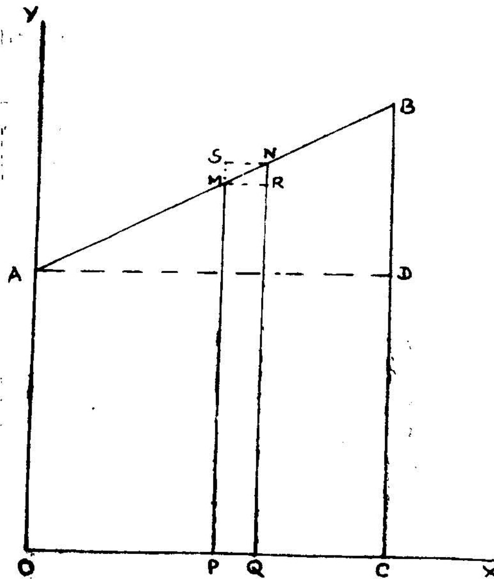
எனவே, $C=\frac{1}{2}u^2$

$\therefore$ $\frac{V^2}{2} = as+\frac{1}{2}u^2$

அல்லது $V^2=u^2+2as$

வரைபட முறை (Graphical method): சமன்பாடுகள் 2·13, 2·14 ஆகியவற்றை வரைபட முறையிலும் பெறலாம்.

சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு துகளின் திசை வேகங்களை Y அச்சிலும் காலங்களை X அச்சிலும் குறித்துக் கிடைக்கப் பெறும் கோடு திசைவேக—நேர வரைகோடு (Velocity-time curve) எனப்படும். படம் 2·27ல் முடுக்கம் சீரானதாகையால் அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு விநாடியிலும் திசை வேகம் சம அளவு மாறும். எனவே AB ஒரு நேர்க்கோடாக அமையும்.



படம் 2·27

இனி, துகள் கடந்த தொலைவு OABC என்ற ஈரிணைப்பக்க நாற்கரத்தின், (trapezium) பரப்பளவால் குறிக்கப்படும் என நிரூபிக்கலாம்.

PQ என்ற ஒரு குறுகிய கால அளவை எடுத்துக்கொள்வோம். அக் கால அளவின் தொடக்கத்தில் திசைவேகம் PM ஆகும். இறுதியில் திசைவேகம் QN ஆகும். PQ என்ற கால அளவை மிகக் குறுகியதாக ஆக்குவோமாயின், அக் கால அளவு முழுவதும் திசைவேகம் மாறாமல், அதாவது PM ஆக இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, PQ என்ற கால அளவில் துகள் கடந்த தொலைவு PM × PQ ஆகும்; அதாவது PMRQ என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பள

விற்குச் சமமாகும். மாறுக, PQ என்ற கால அளவில் உள்ள மாறுத திசைவேகம் QN எனக் கொள்வோமாயின், PQ கால அளவில் துகள் கடந்த தொலைவு PQNS என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமாகும். இனி, PQ என்ற கால இடைவெளியை அறுதியற்ற அளவுக்குச் சிறிதாக்குவோமாயின், மேற்சொன்ன பரப்பளவுகள் PMNQ என்ற பரப்பளவுக்கு ஏறத்தாழச் சமமாகும். இக் கருத்து t என்ற கால இடைவெளியில் எந்தக் குறுகியகால இடைவெளிக்கும் உண்மையாகும். இவ்வாறுக, t என்ற கால இடைவெளியை PQ போன்ற எண்ணற்ற குறுகிய கால அளவுகளாகப் பிரிப்போமாயின், t என்ற கால அளவில் துகள் பெற்ற இடப்பெயர்ச்சியைத் திசைவேக—நேர வரைகோடு, நேரத்தைக் குறிக்கும் X அச்சு, தொடக்கத் திசை வேகம், இறுதித் திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் Y ஆயக் கோடுகள் இவைகளுக்குட்பட்ட பரப்பளவு அதாவது, OABC என்ற சரிணைப்பக்க நாற்கரத்தின் பரப்பளவு குறிக்கும் என திருபிக்கலாம்.

துகள் பெற்ற இடப்பெயர்ச்சி S எனக் கொள்வோமாயின்,

$$S = OABC\text{-ன் பரப்பளவு}$$

$$= OADC\text{-ன் பரப்பளவு} + ABD\text{-ன் பரப்பளவு}$$

$$= OA \times AC + \tfrac{1}{2}\, OC \times DB$$

$$= OA \times AC + \tfrac{1}{2}\, OC\, (CD - CD)$$

$$S = ut + \tfrac{1}{2}\, at^2$$

மேலும்,

$$S = OABC\text{ ன் பரப்பளவு}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(OA + CB) \times OC$$

ஆனால்,

$$OC = \frac{v-u}{a} = \frac{CB-OA}{a}$$

எனவே,

$$S = \tfrac{1}{2}\,(OA+CB)\frac{(CB-OA)}{a}$$

$$= \frac{CB^2 - OA^2}{2a}$$

$$S = \frac{V^2 - u^2}{2a}$$

$$\therefore \quad V^2 = u^2 + 2as.$$

சமன்பாடு 2·13, அதாவது $S = ut + \frac{1}{2} at^2$, ஒரு துகள் t வினாடிகளின் இறுதியில் பெறக்கூடிய மொத்த இடப்பெயர்ச்சியைக் கொடுக்கிறது. இப்போது, t-வது வினாடியில் அது பெறும் இடப்பெயர்ச்சிக்கான சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

ஒரு துகள் u என்ற திசைவேகத்துடன் தொடங்கி, Q என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் செல்வதாகக்கொள் வோம். அதன் இடப்பெயர்ச்சி, t விநாடிகளின் இறுதியில் S ஆகவும் (t−1) விநாடிகளின் இறுதியில் S′ ஆகவும் t ஆவது விநாடியில் S_t ஆகவும் இருக்கட்டும்.

இனி, $S_t = S - S^1$

ஆனால், $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$S' = u(t-1) + \frac{1}{2}a(t-1)^2$

$\therefore$ $S_t = ut + \frac{1}{2}at^2 - u(t-1) - \frac{1}{2}a(t-1)^2$

$= u + at - \frac{1}{2}a$

எனவே, $S_t = u + a(t - \frac{1}{2})$

அல்லது $S_t = u + \frac{a}{2}(2t-1)$ ... ... ·15

புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படும் இயக்கம் (Motion under gravity)

உயரமான இடத்திலிருந்து ஒரு பொருளைப்போட்டால் அது புவிப்பரப்பை நோக்கி விழுவதையும் நேரம் செல்லச்செல்ல அதன் திசை வேகம் சீராக அதிகரிப்பதையும் அதாவது பொருள் சீரான முடுக்கத்துடன் விழுவதையும் காணலாம். இது புவிப் பரப்பின் மீதும், வளி மண்டலத்திலும் உள்ள எந்தப் பொருளையும் புவியானது தன் மையத்தை நோக்கி ஈர்ப்பதால் ஏற்படுவதாகும். இந்த ஈர்ப்பு விசையால், பொருள்கள் பெறும் மாறாத முடுக்கம் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் அல்லது ஈர்ப்பு முடுக்கம் (Acceleration due to gravity) எனப் பெறுகிறது. அது g என்னும் குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் g ன் மதிப்பு எப் பொருளுக்கும் மாறாமல் இருக்கிறது என்றும் ஆனால், புவிப்பரப்பில் இடத்திற்கு இடம் மாறுகிறது என்றும் சோதனைமூலம் அறியப்படுகிறது. மேலும் ஓரிடத்தில் உயரே செல்லச்செல்ல அதன் மதிப்புக் குறைகிறது. g துருவங்களில் பெருமமதிப்பையும் (983·22 செ.மீ/வி²) நில நடுக் கோட்டுப் பகுதிகளில் (equatorial regions) சிறு மதிப்பையும்(978·03 செ.மீ/வி²) பெற்றிருக்கிறது. எனினும், கணக்குகளைச் செய்யும் போது அதன் மதிப்பை மெட்ரிக்முறையில் 980 செ.மீ/வி² என்றும், பிரிட்டன் முறையில் 32 அடி/வி² என்றும் கொள்வது வழக்கம். சென்னையில் அதன் மதிப்பு 978·281 செ·மீ/வி² ஆகும்.

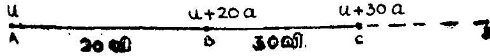
புவியீர்ப்பு முடுக்கம் சீரானதாகையால், இயக்கவியல் சமன் பாடுகளான 2·12, 2·13, 2·14, 2·15, ஆகியவை இந்த இயக்கத் திற்கும் பொருந்தும். ஆனால், a-க்குப் பதில் g-ன் மதிப்பைத் தக்க

வாறு பதிலீடு செய்யவேண்டும். பொருள்கள் கீழ்நோக்கி விழும் போது, அவற்றின் திசைவேகம் அதிகரிப்பதால், $a=+g$ என்றும் அவற்றின்மேல் நோக்கிய பயணத்தின்போது திசைவேகம் குறைவதால் $a=-g$ என்றும் பதிலீடு செய்யவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 6.

சீரான முடுக்கத்துடன் செல்லும் ஓர் இரயில் வண்டி அடுத்தடுத்த இரண்டு கால் மைல் தொலைவுகளை 20 வினாடிகளிலும், 30 வினாடிகளிலும் கடந்து செல்கிறது. அதன் முடுக்கத்தையும் அது ஓய்வுபெறுமுன் அது மேலும் கடந்த தொலைவையும் கணக்கிடுக.

படம் 2·28ல் AB, முதல் கால் மைலையும் BC, இரண்டாவது



படம் 2·28

கால் மைலையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். A-ல் அதன் தொடக்கத் திசை வேகம் u எனவும் அதன் முடுக்கம் a எனவும் இருக்கட்டும்.

A-லிருந்து B-க்குச் செல்ல 20 வினாடிகள் ஆவதால், B-ல் திசை வேகம் $= u+20a$

A-லிருந்து C-க்குச் செல்ல 50 வினாடிகள் ஆவதால் C-ல் திசை வேகம் $= u+50a$

இனி, $S = ut+\frac{1}{2}at^2$ என்னும் சமன்பாட்டில் தெரிந்த மதிப்புகளைப் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$AB = S = u\times 20+\tfrac{1}{2}a\times 20^2$$

$$\therefore\quad 1320 = 20u + 200a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$BC=S = (u+20a)30+\tfrac{1}{2}a\times 30^2$$

$$\therefore\quad 1320 = 30u+1050a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii) லிருந்து

$$30u + 1050a = 20u+20a$$

அதாவது $\quad 10u = -850a$

$$\therefore\quad u = -85a$$

u-ன் இம் மதிப்பை (i)ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$1320 = -1700a+200a$$

$$= -1500a$$

$$\therefore \qquad a = -\frac{132}{150} = -\frac{22}{25} \text{ அடி/வி}^2.$$

a ஆனது எதிர்குறியுடையதாயிருப்பதால், புகை வண்டியின் எதிர் முடுக்கம், $= \frac{22}{25}$ அடி/வி^{2}.

மேலும், a-ன் மதிப்பை (i) ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$1320 = 20u - 200 \times \frac{22}{25}$$

அல்லது $20u = 1320 + 200 \times \frac{22}{25}$

$$= 1496$$

$$= 74{\cdot}8 \text{ அடி/வி.}$$

எனவே, C-ல் திசை வேகம்,

$$= u + 50a$$

$$= 74{\cdot}8 - 50 \times \frac{22}{25}$$

$$= 30{\cdot}8 \text{ அடி/வி.}$$

அடுத்து C-க்குப் பிறகு இரயில் வண்டி ஓய்வு பெறுமுன், CD என்ற தொலைவைக் கடப்பதாகக் கொள்வோம்.

C-ல் அதன் திசைவேகம் $u = 30{\cdot}8$ அடி/வி

அதன் முடுக்கம் $a = \frac{-22}{25}$ அடி/வி

D-ல் அதன் திசைவேகம் $V = 0$

$CD = S$ என்றால் சமன்பாடு 2·14-ன்படி

$$O = 30{\cdot}8^2 - 2 \times \frac{22}{25} \times S$$

$$\therefore \qquad \frac{44}{25} S = 30{\cdot}8^2$$

$$S = \frac{30{\cdot}8^2 \times 25}{44}$$

$$= 539 \text{ அடி.}$$

எனவே, இரயில் வண்டியின் எதிர்முடுக்கம் $= \frac{22}{25}$ அடி/வி^{2}

அது ஓய்வு பெறுமுன் மேலும் கடக்கும் தொலைவு $=$ 539 அடி.

மாதிரிக் கணக்கு 7.

120 அடி உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து வினாடிக்கு 160 அடி என்ற திசை வேகத்துடன் ஒரு கல் செங்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. கல் எவ்வளவு உயரம் மேலே செல்லும்? எவ்வளவு நேரங் கழித்துக் குன்றின் அடியை வந்தடையும்? அது எறியப்பட்ட இடத்திலிருந்து 144 அடி உயரத்தில் அதன் திசை வேகம் என்ன?

இத்தகைய கணக்குகளில் தொடக்கத் திசை வேகத்திற்கு எதிர்த் திசையில் உள்ள அளவுகளை எதிர்க்குறியுடையதாகக் கொள்வோமாயின், விடை காண்பது எளிதாகும்.

a. கல் செல்லும் பெரும உயரம் h எனக் கொள்வோம்.

பெரும உயரத்தில் திசைவேகம் $V = O$

தொடக்கத் திசைவேகம் $u = 160$ அடி/வி.

முடுக்கம் கீழ்நோக்கிச் செயற்படுவதால் $a = -g = -32$ அடி/வி^{2}.

எனவே, சமன்பாடு 2·14 ன் படி

$$O = 160^2 - 2 \times 32 \times h$$

அல்லது $64\,h = 160^2$

எனவே $h = \frac{160^2}{64} = 400$ அடி.

b. கல் குன்றின் அடியை அடைய எடுத்துக் கொண்ட நேரம் t வினாடிகள் எனக் கொள்வோம் கல், t வினாடிகளின் தொடக்கத்தில் குன்றின் உச்சியிலும் இறுதியில் அதன் அடியிலும் அதாவது உச்சியிலிருந்து 120 அடி தொலைவில் கீழேயும் இருப்பதால்

$$S = -120 \text{ அடி}$$

தொடக்கத்திசை வேகம் $u = 160$ அடி/வி

முடுக்கம் $a = -g = -32$ அடி/வி^{2}

எனவே சமன்பாடு 2·13 ன் படி

$$-120 = 160 \times t - \tfrac{1}{2} \times 32 \times t^2$$

அல்லது $2t^2 = 20t - 15 = 0$

எனவே, இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கான தீர்வின்படி,

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 120}}{4}$$

$$= \frac{20 \pm 22 \cdot 8}{4} \text{ வினாடிகள்}$$

$t = 10{\cdot}7$ வினாடிகள் அல்லது $-0{\cdot}7$ வினாடி

t-க்கு எதிர்குறியையுடைய மதிப்பு பொருந்தாததலால்

$t = 10{\cdot}7$ வினாடிகள்.

c. கல் எறியப்பட்ட இடத்திலிருந்து 144 அடி உயரத்தில் அதன் திசைவேகம் v எனக் கொள்வோம். இங்கு, கல்லின் இறுதி நிலை குன்றின் உச்சியிலிருந்து மேல்நோக்கி இருப்பதால்,

$S = 144$ அடி

தொடக்கத்திசை வேகம் $u = 160$ அடி/வி

முடுக்கம் $a = -g = -32$ அடி/வி^{2}

எனவே, சமன்பாடு 2·14ன் படி

$V^2 = 160^2 - 64 \times 144$

$= 25600 - 9216$

$= 16384$

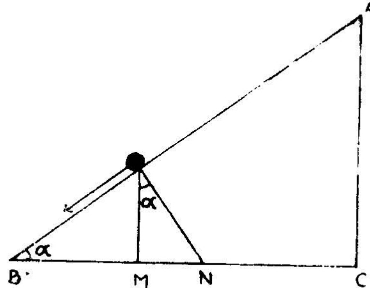
$\therefore \quad V = 128$ அடி/வி.

கல் செல்லும் உயரம் = 400 அடி

குன்றின் அடியை அடைய கல் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் = 10·7 வினாடி.

குன்றின் உச்சியிலிருந்து 144 அடி உயரத்தில் கல்லின் திசைவேகம் = 128′/வி.

வழவழப்பான சாய்தளம் ஒன்றின்மீது ஒரு துகளின் கீழ் நோக்கிய இயக்கம் :



படம் 2·29

படம் 2·29-ல் AB என்பது கிடைத்தளத்துடன் (BC) α என்ற கோணத்தையமைக்கும் ஒரு சாய்தளத்தைக் குறிக்கிறது. A-

லிருந்து கிடைத்தளத்திற்கு வரைந்த செங்குத்துக்கோடு அதனை C-ல் சந்திக்குமாயின், AC சாய்தளத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கும். தளத்தின்மீது கீழ்நோக்கி இயங்கும் P என்ற துகளைக் கருதுவோம். P-லிருந்து BC-க்கும் AB-க்கும் முறையே, PM, PN என்ற நேர் குத்துக்கோடுகளை வரைவோமாயின்,

$$\widehat{MPN} = \widehat{ABC} = \alpha$$

இனி, AB என்ற தளம் இல்லையெனில், A ல் விடப்பட்ட துகள் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி g என்ற முடுக்கத்துடன் விழும். இப்பொழுது துகளின் முடுக்கத்தைச் சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் அதற்கு நேர்க்குத்துத் திசையிலும் முறையே, $g \sin \alpha$, $g \cos \alpha$ எனப் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். ஆனால், தளம் அதற்குச் செங்குத்தான திசையில் உள்ள இயக்கத்தைத் தடைசெய்துவிடும். எனவே, துகள் தளத்தின் வழியே இயங்கும். தளத்தின் வழியே துகளின் முடுக்கம் அத் திசையில் g ன் ஆக்கக்கூறு, அதாவது $g \sin \alpha$ ஆகும்.

துகள் A-ல் ஓய்விலிருந்து புறப்படுவதாகக் கொள்வோம். அது B-ஐ அடையும்போது, அதன் திசைவேகத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

துகள் கடந்த தொலைவு $= S =$ சாய்தளத்தின் நீளம் $l =$

தொடக்கத் திசைவேகம் $= u = O$

B-ல் அதன் திசைவேகம் V எனக்கொள்வோமாயின், சமன்பாடு 2·14-ன் படி

$$V^2 = O + 2\, g \sin \alpha \cdot l$$

சாய்தளத்தின் உயரம் $AC = h$ எனின்

$$\sin \alpha = \frac{h}{l}$$

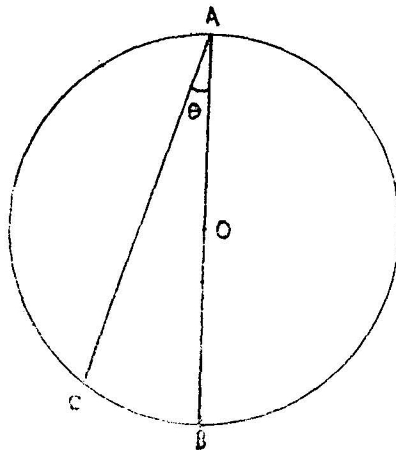
$$\therefore \quad V^2 = 2\, gh$$

அல்லது $V = \sqrt{2\, gh}$

ஆனால், $\sqrt{2\, gh}$ என்பது தானே விழும் ஒரு பொருள் h அடி உயரத்தைக் கடக்கும்போது பெறும் திசைவேகமாகும்.

எனவே, ஒரு சாய்தளத்தின்மீது கீழ்நோக்கி இயங்கும் ஒரு துகள் அத் தளத்தின் இறுதியை அடையும்போது பெறும் திசை வேகம் தானே விழும் ஒரு துகள் சாய்தளத்தின் உயரத்திற்குச்

சம்மான உயரத்தைச் செங்குத்தாகக் கடக்கும்போது, பெறும் திசை வேகத்திற்குச் சமமாகும்.



படம் 2·30

செங்குத்தான வட்டம் ஒன்றின் நாண் வழியே இயங்கும் துகள்: படம் 2·30-ல் O என்பது செங்குத்தான வட்டம் ஒன்றின் மையமாகும். AOB என்பது ஒரு செங்குத்தான விட்டம்; AC என்பது AOB உடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் ஒரு நாண், A-ல் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு AC வழியே இயங்கும் ஒரு துகளைக் கருதுவோம். துகள், C-ஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

துகளின் A-ல் தொடக்கத் திசைவேகம் $u = O$

முடுக்கம் $a = g \cos \theta$

துகள் கடக்கும் தொலைவு $S = AC = AB \cos \theta = d \cos \theta$

துகள் C-ஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t எனின் சமன்பாடு 2·13 ன் படி

$$d \cos\theta \; O + \tfrac{1}{2} g \cos \theta \cdot t^2$$

அல்லது $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$

t-க்கான மேற்கண்ட கோவையில் θ இடம் பெறவில்லையாதலால், A-விருந்து C-ஐ அடையத் துகள் எடுத்துக்கொள்ளும் காலம் θ-ன் மதிப்பைச் சார்பற்றுள்ளது. மேலும், $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ என்பது

துகள் A-லிருந்து செங்குத்தாக B-ஐ அடைய அதாவது விட்டத்தைக் கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரமாகும்.

எனவே, ஒரு துகள் செங்குத்தான வட்டம் ஒன்றின் எந்த நாணின் வழியாகவும் வட்டத்தின் உச்சியிலிருந்து நாணின் அடி வரை உள்ள தொலைவைக் கடப்பதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் மாறுததாகும்.

மீவிரைவு இறக்கக்கோடு (Line of quickest descent)

செங்குத்துத் தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதே தளத்திலுள்ள ஒரு வளைகோட்டிற்கு ஒரு துகள் மிகக் குறுகிய காலத்தில் எந்தக் கோட்டின் வழியாக இயங்குமோ, அக்கோடு அப்புள்ளியிலிருந்து அந்த வளைகோட்டிற்குள்ள மீவிறைவு இறக்கக் கோடு எனப்படும்

பொதுவாக ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வளைகோட்டிற்குள்ள மீவிரைவு இறக்கக்கோடு, அவ் விரண்டிற்குமிடையே வரையப்பட்ட மிகக்குறைந்த நீளமுள்ள கோடாக இருப்பதில்லை.

தேற்றம் 2·1 : செங்குத்துத்தளத்தில் உள்ள P என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு வளை கோட்டிற்குள்ள மீவிரைவுக் கோடானது, P-ஐ உச்சப் புள்ளியாகக் கொண்டிருக்குமாறு வரையப்பட்ட வட்டம் வளைகோட்டைத் தொடும் புள்ளி (Q)-யை P உடன் இணைக்கும் கோடாகும்.

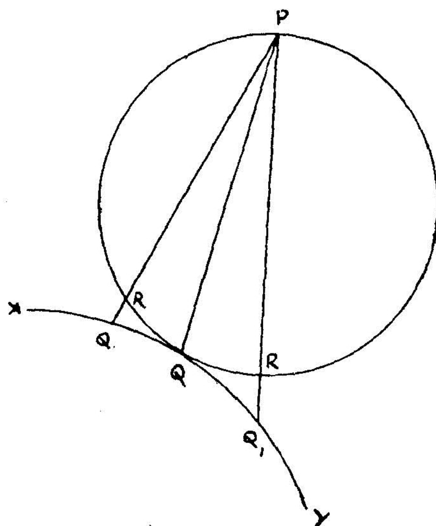
நிரூபணம் : படம் 2·31-ல் P என்பது குறிப்பிட்ட புள்ளியையும் XY என்பது அதே தளத்தில் உள்ள வளைகோட்டையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். P-ஐ உச்சப்புள்ளியாகக் கொண்டிருக்குமாறு வரையப்படும் வட்டம் வளைகோட்டை Q என்ற புள்ளியில் அகவியலாகத் தொடட்டும். வளைகோட்டில் Q-ஐத் தவிர Q_1 என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம். PQ_1 வட்டத்தை R என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

இனி, $PQ_1 > PR$

எனவே, துகள் P-லிருந்து PQ வழியே R-ஐ அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் துகள் Q_1 ஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைவிடக் குறைவானதாகும்.

ஆனால், துகள் P-லிருந்து PR வழியே R-ஐ அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் = துகள் P-லிருந்து PQ வழியே Q-ஐ அடைய

எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம். எனவே, துகள் P-லிருந்து PQ வழியே வளைகோட்டை அடைவதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்



படம் 2·31

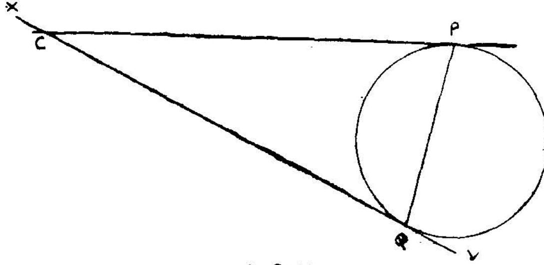
வேறெந்தக் கோட்டின் வழியேயும் வளைகோட்டை அடைவதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைவிடக் குறைந்ததாகும். எனவே, PQ என்பது P என்ற புள்ளியிலிருந்து XY என்ற வளைகோட்டிற்குள்ள மீவிரைவு இறக்கக் கோடாகும்.

இவ்வாறே ஒரு குறிப்பிட்ட வளைகோட்டிலிருந்து அதே தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்குள்ள மீவிரைவு இறக்கக்கோட்டைப் பெறவேண்டுமாயின், P-ஐ அடிப்புள்ளியாகக் கொண்டிருக்கக் கூடியதும் வளைகோட்டை Q என்ற புள்ளியில் தொடுமாறும் உள்ள ஒரு வட்டத்தை வரையவேண்டும். பின்னர் QP என்பது நமக்குத் தேவையான மீவிரைவு இறக்கக்கோடாகும்

மாதிரிக் கணக்கு 8. செங்குத்துத்தளம் ஒன்றில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதே தளத்தில் உள்ள நேர்க்கோட்டிற்குள்ள மீவிரைவு இறக்கக்கோட்டைப் பெறுக.

படம் 2·32-ல் P என்பது குறிப்பிட்ட புள்ளியையும் XY என்பது நேர்க்கோட்டையும் குறிக்கின்றன. இப்பொழுது P-லிருந்து XY-ஐ C என்ற புள்ளியில் வெட்டுமாறு ஒரு கிடைக்கோடு வரையவும்

C-லிருந்து CP = CQ என்னுமாறு XY-ல் Q என்ற புள்ளியையும் காண்க. இனி, PQ நமக்குத் தேவையான கோடு.



படம் 2·32

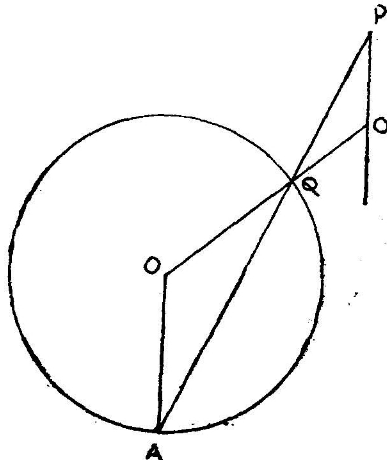
எவ்வாறெனில், P-ஐ உச்சப் புள்ளியாகவும் நேர்க்கோட்டைத் தொடுமாறும் உள்ள ஒரு வட்டத்தை வரையவும். வட்டம் நேர்க் கோட்டை Q என்ற புள்ளியில் தொடுவதாகக் கொள்வோம். இனி, தேற்றம் 2·1-ன்படி PQ நமக்குத் தேவையான மீவிரைவு இறக்கக் கோடாகும்.

இப்பொழுது P வட்டத்தின் உச்சப் புள்ளியாயிருப்பதால் CP P என்னும் புள்ளியில் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு. மேலும் வட்டம் XY என்ற கோட்டை Q என்ற புள்ளியில் தொடு வதால் CQ, Q என்னும் புள்ளியில் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு. இவ்விரு தொடுகோடுகளும் C-ல் சந்திப்பதால் CP = CQ ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 9. ஒரே செங்குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற் குள்ள மீவிரைவு இறக்கக்கோட் டைப் பெறுக.

P-லிருந்து வட்டத்தின் அடிப்புள்ளியின் வழியே செல்லு மாறு ஒரு கோடு வரையவும். அது வட்டத்தை Q என்ற புள்ளி யில் வெட்டுமாயின், PQ நமக்குத் தேவையான கோடு ஆகும்.

[படம் 2·33]



படம் 2·33

எவ்வாறெனில், வட்ட மையம் O, Q ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும் நேர்க்கோடு P-ன் வழியே வரையப்பட்ட செங்குத்துக்

கோட்டை O_1-ல் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். OA, PO_1 ஆகிய இரண்டும் இணைகோடுகள் (செங்குத்துக் கோடுகள்) ஆதலால்

$$\widehat{O_1PQ} = \widehat{OAQ}$$
$$= \widehat{OQA}$$
$$= \widehat{O_1QP}$$

எனவே, O_1 ஐ மையமாகவும் O_1P-ஐ ஆரமாகவும் வைத்து வரையப்பட்ட வட்டம் P-ஐ உச்சப் புள்ளியாகக்கொண்டு இருப்ப தோடு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை Q என்ற புள்ளியில் தொடும். எனவே PQ மீ விரைவு இறக்கக் கோடாகும். (தேற்றம் 2·1).

P என்ற புள்ளி வட்டத்தினுள்ளே இருக்குமாயின் P-ஐ வட்டத்தின் உச்சிப் புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோட்டை வட்டத்தில் Q என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமாறு நீட்டிவிட வேண்டும். பின்னர் PQ என்பது தேவைப்படும் மீவிரைவு இறக்கக் கோடாகும்.

பயிற்சி II

1. மணிக்கு 36 மைல் திசை வேகத்தில் செல்லும் ஓர் இரயில் வண்டியிலிருந்து ஒரு பிரயாணி இரயில் வண்டியின் இயக்கத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் மணிக்கு 15 மைல் திசை வேகத்துடன் ஒரு கல்லை எறிகிறார். கல்லின் தொகுபயன் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

[ரயிலின் இயக்கத் திசை வேகத்துடன் 22°17′ கோணத்தில் 13 மை/ம.]

2. இரண்டு திசை வேகங்களின் கூட்டுத் தொகை 36 செ.மீ./வி. அவற்றுள் சிறியதின் திசைக்கு நேர்குத்தாக உள்ள அவற்றின் தொகு பயன் 24 செ.மீ./வி. அத்திசை வேகங்களையும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தையும் கணக்கிடுக.

[10 செ.மீ./வி; 26 செ.மீ./வி; 62°24′]

3. ஓர் ஆற்றின் நீரோட்டத் திசை வேகம் விநாடிக்கு 3 மீட்டர். விநாடிக்கு 5 மீட்டர் வீதம் நீந்தக் கூடிய ஒருவர் ஆற்றை நேர் குறுக்காகக் கடக்க விரும்பினால், அவர் எத் திசையில் நீந்த வேண்டும்?

[நீரோட்டத்திற்கு 126°52′ கோணத்தில்]

4. மூன்றுவது கணக்கில் அவர் ஆற்றைக் குறுகியகால அளவில் கடக்க விரும்பினுல், எத் திசையில் நீந்த வேண்டும்?

[நீரோட்டத்திற்கு 59°2' கோணத்தில்]

5. 400 அடி அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றின் குறுக்காக ஒருவர் மணிக்கு 4 மைல் வேகத்தில் நீந்துகிருர். ஆற்றின் வேகம் மணிக்கு 2 மைல் என்ருல், நீரோட்டத் திசையில் கிளம்பிய இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் அவர் எதிர்க்கரையை அடைவார் ?

[200 அடி]

6. கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 4 கி.மீ. வேகத்தில் நடந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு மனிதருக்குக் காற்று வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகத்தில் வட கிழக்காக மிதி வண்டியில் செல்லும் மற்ருெருவருக்குக் காற்று வட கிழக்குக்கு 15° கிழக்குத் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்று கிறது. காற்றின் உண்மையான திசையையும் திசை வேகத்தையும் கணக்கிடுக.

[வடக்குக்கு 25°51' மேற்காக 9·17 மைல்/மணி]

7. கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒருவருக்குக் காற்று வடகிழக்கி லிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. அவர், அவருடைய வேகத்தை இரட்டிப்பாக்கும்போது காற்று வடக்குடன் கிழக்குத் திசையில் $\cot^{-1} 2$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கும் திசையி லிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. காற்றின் உண்மையான திசை தெற்குநோக்கி உள்ளது என்பதை நிறுவுக.

8. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஒரு கப்பல் மற்ருெரு கப்பலி லிருந்து மேற்கில் 20 மைல் தொலேவில் உள்ளது. முதல் கப்பல் வடகிழக்காக மணிக்கு 20 மைல் வேகத்திலும் இரண்டாவது வட மேற்காக மணிக்கு 16 மைல் வேகத்திலும் செல்கின்றன. அவற்றிற்கிடையே இருக்கக்கூடிய மிகக்குறைந்த தொலேவைக் கணக்கிடுக.

[2·212 மைல்கள்]

9. A என்ற கப்பல் அதற்கு மேற்குத் திசையில் 16 மைல் தொலேவில் மணிக்கு 12 மைல் வேகத்தில் வடக்கு நோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கும் B என்ற மற்ருெரு கப்பலேக் காண்கிறது. 24 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு அவையிரண்டும் மிக அருகே ப மைல் தொலேவில் இருக்கக் காணப்படுகின்றன. A-ன் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

10. இரு துகள்கள் விநாடிக்கு 1 அடி என்ற ஒரே வேகத்துடன் 2 அங். ஆரத்தையுடைய ஒரு வட்டத்தில் ஒரே போக்கில் இயங்குகின்றன. அவற்றுள் ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றதின் சார்பு கோணத்திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

[6 ரேடியன்/வி]

11. இரு துகள்கள் u என்ற ஒரே வேகத்துடன் a என்ற ஆரத்தையுடைய ஒரு வட்டத்தில் ஒரே போக்கில் இயங்குகின்றன. அவற்றுள் ஒன்றைப்பொறுத்து மற்றதின் சார்பு கோணத்திசை வேகம் u/a என நிறுவுக.

12. A. B என்ற துகள்கள் முறையே a, b என்ற ஆரங்களை உடைய பொது மையமுடைய வட்டங்களில் இயங்குகின்றன. அவற்றின் வேகங்கள் அவற்றிற்குரிய வட்டங்களின் ஆரங்களுக்கு எதிர் விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றிலிருந்து வரையப்பட்ட ஆரங் களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$ என்னும்போது, அவற்றின் சார்புத்திசை வேகம் அவற்றை இணைக்கும் கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளது என்பதை நிறுவுக.

13. ஓர் இயங்கும் துகள் 8 ஆவது விநாடியில் 55 அடி தொலைவையும் 13ஆவது விநாடியில் 85 அடி தொலைவையும் கடக்கிறது. அதன் தொடக்கத் திசை வேகம், சீரான முடுக்கம் ஆகிய வற்றைக் கணக்கிடுக.

[10 அடி/வி., 6' அடி/வி.^{2}]

14. விநாடிக்கு 96 அடி வேகத்துடன் ஒரு பொருள் செங்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. 3 விநாடிகள் கழித்து அதே இடத்திலிருந்து அதே திசையில் விநாடிக்கு 72 அடி வேகத்துடன் மற்றொரு பொருள் எறியப்படுகிறது. அவை எவ்வளவு உயரத்தில் எப்பொழுது சந்திக்கும்?

[இரண்டாவது பொருள் எறியப்பட்ட பின்னர் 2 விநாடிகளில் 80' உயரத்தில்]

15. சீரான முடுக்கம் ஒன்றுடன் செல்லும் ஓர் இரயில் வண்டியின் இரு முனைகள் அதற்கு வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியை முறையே u, v என்ற திசை வேகங்களுடன் கடக்கின்றன. இரயில் வண்டியின் நடுப்பகுதி அப் புள்ளியை $\sqrt{\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$ என்னும் திசை வேகத்துடன் கடக்கும் என்பதை நிறுவுக.

16. ஒரு மின்வண்டி மீனம்பாக்கத்திலிருந்து புறப்பட்டு 2 நிமிடங்கள் 40 விநாடிகள் நேரத்தில் 8580 அடி தொலைவிலுள்ள அதற்கடுத்த பல்லாவரம் நிலையத்தை அடைகிறது. அது முதலில் சீரான முடுக்கத்தையும், அடுத்து 1 மைல் தொலைவிற்குச் சீரான வேகத்தையும், பின்னர்ச் சீரான எதிர் முடுக்கத்தையும் பெற்றுள்ளது. வண்டி முடுக்கம் பெற்ற கால அளவு எதிர் முடுக்கம்பெற்ற கால அளவைப் போன்று இரு மடங்கு ஆயின், வண்டியின் (i) மைல்/மணி கணக்கில் சீரான வேகம் (ii) சீரான முடுக்கம் (iii) எதிர்முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

[46 மைல்/மணி, 1·561′/வி², 3·122′/வி²]

17. ஓய்விலிருந்து புறப்படும் ஓர் ரயில் வண்டி விநாடிக்கு 30 அடி வேகத்தைப் பெறும்வரை முடுக்கப்படுகிறது. அடுத்து விநாடிக்கு 60 அடி வேகத்தைப் பெறும்வரை முந்தையதைப் போல் இரு மடங்கு அளவுக்கு முடுக்கப்படுகிறது. அதன் பின்னர் அதன் வேகம் சீரானதாக உள்ளது. புகைவண்டி முதலாவது மைலைக் கடக்க 18 விநாடிகள் எடுத்துக் கொண்டதென்றால் தொடக்கத்தில் அதன் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

[1·2′/வி²]

18. கிடைமட்டத்துடன் $\sin^{-1}(\frac{3}{5})$ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் ஒரு சாய்தளத்தின்மீது விநாடிக்கு 32 அடி என்ற வேகத்தில் ஒரு துகள் (a) மேல் நோக்கி (b) கீழ் நோக்கி எறியப் படுகிறது. 5 விநாடிகளின் இறுதியில் அது கடந்த தொலைவு களையும் திசை வேகங்களையும் கணக்கிடுக.

[−80′, 64′/வி; 400′, 128′/வி]

19. செங்குத்தான வட்டம் ஒன்றின் உச்சியிலிருந்து அதன் நாண்கள் வழியே ஒரு துகள் இயங்குகிறது. நாண்களின் இறுதியில் அதன் திசை வேகங்கள் நாண்களின் நீளத்திற்கு நேர் விகிதத்தி லிருக்கின்றன என்று நிறுவுக.

20. உச்சி மேல் நோக்கியிருக்குமாறும் அச்சு செங்குத்தாகவும் உள்ள ஒரு பரவளையின் குவியத்திலிருந்து ஒரு துகள் ஓய்விலிருந்து புறப்படுகிறது. பரவளைவிற்குள்ள அத் துகளின் மீவிரைவு இறக்கக் கோட்டின் நீளம் பரவளையின் நேரகலத்திற்குச், (Latus rectum) சமம் என நிறுவுக.

21. ஒரு பொருளைப்பொறுத்த மற்றொன்றின் சார்புத் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

22. மேற்கு நோக்கி மணிக்கு 7 கி. மீ. வேகத்தில் ஓடிக் கொண்டிருக்கும் ஒருவருக்கு காற்று வடமேற்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. அவர் மணிக்கு 3 மைல் வேகத்தில் நடக்கும் போது காற்று வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. காற்றின் உண்மையான திசை வேகமும் திசையும் யாவை?

23. ஒரு நேர்க்கோட்டில் சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு துகள் அடுத்தடுத்த சமமான கால இடைவெளிகளில் கடக்கும் தொலைவுகள் ஒரு கூட்டுத் தொடரை அமைக்கின்றன என நிறுவுக.

24. சீரான எதிர் முடுக்கத்துடன் ஒரு நிலையத்தையடையும் ஓர் இரயில் வண்டி அடுத்தடுத்த இரு கால் மைல் தொலைவுகளை 16 விநாடியிலும் 20 விநாடியிலும் கடக்கிறது. அது ஓய்வு பெறுமுன் மேலும் கடக்கக்கூடிய தொலைவைக் கணக்கிடுக.

25. கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு கப்பலுக்கு மணிக்கு 12 மைல் வேகத்தில் சென்றுகொண்டிருக்கும் மற்றொரு கப்பல் வடமேற்கு நோக்கிச் செல்வதுபோல் தோன்றுகிறது. இரண்டாவது கப்பல் செல்லக் கூடிய திசைகள் இரண்டு இருக்கலாம் எனக் காட்டுக. அவ் விரு திசைகளையும் காண்க. இரண்டாவது கப்பல் அத் திசைகளில் செல்லும்போது, முதற் கப்பலைப் பொறுத்து அதன் சார்புத் திசை வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

26. ஒரு கப்பல் மணிக்கு 6 மைல்வீதம் தெற்கு நோக்கி ஓடிக்கொண்டிருக்கும் ஓர் ஆற்றில் அதைப் பொறுத்து மணிக்கு 15 மைல் என்ற சார்புத் திசை வேகத்தில் மேற்கு நோக்கிச் செல்லு கிறது. வடக்கு நோக்கி மணிக்கு 30 மைல் வீதம் சென்றுகொண் டிருக்கும் ஒரு புகைவண்டியின் கப்பலைபொறுத்த சார்புத்திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

3. இயக்கவியல் விதிகள்

(Laws of motion)

சென்ற பகுதியில் ஒரு துகளின் இயக்கத்தைப்பற்றிப் பார்த்தோம். இப் பகுதியில் துகளின் இயக்கத்திற்குக் காரணமான விசையைப்பற்றியும் அவ் விசைக்கும் துகளின் இயக்கத்திற்கும் உள்ள தொடர்புகளைப் பற்றியும் காண்போம். விசை என்றால் என்ன, அவ் விசைக்கும் துகளின் இயக்கத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன என்பனபற்றி நியூட்டனின் விதிகள் நமக்குக் கூறுகின்றன.

நியூட்டனின் விதிகளைக் கூறுமுன் ஒரு பொருளின் உந்தம் (momentum) என்னும் பண்பினைப்பற்றிக் கூறுவது இன்றியமையாததாகிறது.

ஒரு பொருளின் உந்தம் என்பது அதன் நிறை, திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனாகும். இதுவும் ஒரு வெக்டராகும். அதன் அலகுகள் : மெட்ரிக் முறையில், கி—செ.மீ/வி; பிரிட்டன் முறையில் பவு.—அடி/வி. ஆகும்.

நியூட்டனின் விதிகள் (Newton's laws)

முதல் விதி: புறவிசை ஒன்று தொழிற்படும் வரை அமைதிநிலை அல்லது நேர்க்கோட்டில் சீரான திசை வேக நிலையிலுள்ள ஒரு பொருள் அந்த நிலையிலேயே தொடர்ந்து இருக்கும்.

இரண்டாவது விதி : ஒரு பொருளின் உந்தம் மாறும் வீதம் அதன்மீது செயற்படும் விசைக்கு நேர் விகிதத்தில் அமைவதோடு அவ் விசையின் திசையிலேயே ஏற்படுகிறது.

மூன்றாவது விதி : ஒவ்வொரு விசைக்கும் அதற்குச் சமமான எதிர்விசை உண்டு.

நியூட்டனின் விதிகளை நேரடியாக நிரூபிக்கக்கூடிய எந்தவித சோதனையும் கிடையாது. எனினும், இவ் விதிகளின் அடிப்படையில் அமைந்த வானியலை (astronomy) ஆதாரமாகக் கொண்டு முன் கூறப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் சிறிதும் பிழையின்றி நிகழ்கின்றன. எனவே, இவ் விதிகளை நாம் புறக்கணிக்க முடியாது.

இனி, நியூட்டனின் விதிகளை விரிவாக ஆராய்வோம்.

முதல் விதி: இவ் விதியை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். 1. அமைதி நிலையில் இருக்கும் ஒரு பொருளைப்பற்றியது; அதாவது, அமைதி நிலையில் இருக்கும் ஒரு பொருள் புறவிசையொன்று தொழிற்படும்வரை எப்போதும் அமைதி நிலையிலேயே இருக்கும்; 2. இயங்கும் பொருளைப் பற்றியது; அதாவது, சீரான திசை வேகத்துடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு பொருள் புறவிசை ஒன்று தொழிற்படும்வரை அதே நேர்க்கோட்டில் அதே வேகத்துடன் எப்போதும் இயங்கும். அவற்றுள் முதற் பகுதியின் உண்மையை அன்றாட நிகழ்ச்சிகளிலிருந்து தெளிவாக அறியலாம். மேசை ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்ட ஒரு புத்தகம் அதை ஒருவர் அசைத்தாலன்றி அசைவதில்லை. இரண்டாவது பகுதியைத் தெளிவாக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் எதையும் இயற்கையில் காண முடிவதில்லை. ஏனெனில், புறவிசை செயற்படாத இயக்கம் எதுவும் இயற்கையில் கிடையாது. எனினும், அத்தகைய ஒரு நிகழ்ச்சியை கற்பனைக் கண் கொண்டு நோக்கலாம். பூப் பந்து ஒன்றை ஒரு புல் தரைமீதும் ஒரு சலவைக்கல் தளத்தின்மீதும் தள்ளுவதாகக் கொள் வோம். பந்து சலவைக்கல் தளத்தின்மீது அதிகதூரம் செல் வதைக் காணலாம். இஃது ஏனெனில், பந்துக்கும் சலவைக்கல் தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள உராய்வு புல்தரைக்கும் பந்திற்கும் உள்ள உராய்வைவிடக் குறைவு. பந்தின் பரப்பு, தளம் ஆகியவற் றின் வழவழப்பை அதிகமாக்க அதிகமாக்கப் பந்து செல்லும் தூரமும் அதிகமாகும். எனவே, அவை யிரண்டையும் சிறிதும் உராய்வற்ற அளவுக்கு வழவழப்பாக்க முடியுமாயின், பந்து நிற்காமல் சென்று கொண்டேயிருக்கும்.

இவ் விதியிலிருந்து எப் பொருளும் அதன் நிலையைத் தானாகவே மாற்றிக்கொள்ளமுடியாது என்பது பெறப்படுகிறது. இப் பண்பு நிலைமம் (inertia) எனப்படுகிறது.

மேலும், இவ் விதியிலிருந்து விசை என்பது என்ன என்று வரை யறுக்க முடியும்.

விசை என்பது அமைதிநிலை அல்லது நேர்க்கோட்டில் சீரான திசைவேக நிலையிலுள்ள ஒரு பொருளில் செயற்பட்டு அந் நிலையை மாற்ற முயலும் ஒன்றாகும்.

வேகமாக ஓடும் ஒரு வண்டியிலிருந்து குதிக்கும் ஒரு மனிதன் கீழே விழுந்து விடுவதை, நியூட்டனின் முதல்விதியின் அடிப் படையில் விளக்கலாம். மனிதன் வண்டியிலிருக்கும்வரை அவன் உடல் முழுவதும் வண்டியின் வேகத்துடன் இயங்கிக்கொண் டிருக்கும். அவன் கீழே குதித்தவுடன் அவன் கால்கள்மட்டும் தரையைத் தொடுவதால் நிறுத்தப்படும். அதே நேரத்தில் அவன் உடலின் ஏனைய பாகங்கள் வண்டியின் வேகத்தோடு இயங்கு கின்றன. எனவே அவன் கீழே விழ நேரிடுகிறது.

இரண்டாவது விதி : இவ் விதியிலிருந்து விசையை அளவிடு வதற்கான ஒரு முறையைப் பெறுகிறோம்.

u என்ற திசைவேகத்துடன் தொடங்கி ஒரு நேர்க்கோட்டில் செல்லும் m என்ற நிறையைக்கொண்ட ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அப் பொருளின்மீது F என்ற ஒரு விசை செயற்பட்டு அதன் திசைவேகத்தை t விநாடிகளில் v-க்கு மாற்றுவதாகக் கொள்வோம்.

அப் பொருளின் தொடக்க உந்தம் $= mu$

இறுதி உந்தம் $= mv$

எனவே, அப் பொருளின் உந்தத்தில் ஏற்பட்ட மாறுதல் $= m(v-u)$

$\therefore$ அப் பொருளின் உந்தம் மாறும்வீதம் $= m\frac{(v-u)}{t}$

ஆனால், $\frac{(v-u)}{t} =$ a துகளின் முடுக்கம். (சமன் 2·12)

எனவே, பொருளின் உந்தம் மாறும் வீதம் $= ma$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, $F \propto ma$

அல்லது $F = Kma$

K என்பது ஒரு மாறிலி. அதன் மதிப்பு விசையின் அலகைப் பொறுத்தது.

ஓரலகு நிறையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது செயற்பட்டு அப் பொருளில் தன் திசையிலேயே ஓரலகு முடுக்கத்தை ஏற்படுத்தும் விசை ஒரும விசையாகும்.

இந்த வரையறையின்படி,

$m = 1 \; a = 1$ என்னும்போது $F = 1$

எனவே, $1 = k \times 1 \times 1$

அல்லது $k = 1$

$\therefore \quad F = ma \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 3{\cdot}1$

எனவே, ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் விசையானது அப் பொருளின் நிறை, அதில் ஏற்படும் முடுக்கம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனால் அளவிடப்படுகிறது.

விசைக்கு எண்மதிப்பும் திசையும் உண்டு. எனவே, அது ஒரு வெக்டராகும்.

விசையின் அலகுகள் : விசையின் அலகுகள் சார்பிலா அலகுகள் (absolute units), புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகுகள் (gravi tational unit) என இருவகைப்படும்

சார்பிலா அலகுகள் : மெட்ரிக்முறையில் விசையின் சார்பிலா அலகு, டைன் (dyne) எனப்படுவதாகும். ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளின்மீது செயற்பட்டு, அதில் 1 செ. மீ./வி^{2} முடுக்கத்தை விளை விக்கும் விசை 1 டைன் விசையாகும். பிரிட்டன்முறையில் விசையின் சார்பிலா அலகு பவுண்டல் (poundal) ஆகும். ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது செயற்பட்டு, அதில் 1 அடி/வி^{2} முடுக்கத்தை விளைவிக்கும் விசை ஒரு பவுண்டல் விசை எனப்படும்.

சார்பிலா அலகுகளின் மதிப்புகள் எல்லாவிடத்தும் ஒரே அளவானவை. அவை, புவியீர்ப்பு விசையால் பாதிக்கப்படுவ தில்லை.

புவிஈர்ப்பு சார்ந்த அலகுகள் : இந்த அலகுகளின் மதிப்பு புவிஈர்ப்பு விசையைச் சார்ந்துள்ளன. எனவேதான் அவை அப் பெயர் பெற்றன.

புவிஈர்ப்பு காரணமாக ஓரலகு நிறையுள்ள பொருளின்மீது செயற்படும் விசை புவிஈர்ப்பு சார்ந்த ஓர் அலகு விசையாகும்.

மெட்ரிக் முறையில் விசையின் புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகு கிராம் எடை (gram weight) எனப்படும். ஒரு கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசை ஒரு கிராம் எடையா கும். பிரிட்டன் முறையில் விசையின் புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகு

பவுண்டு எடை எனப்படும். ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளின் மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசை ஒரு பவுண்டு எடையாகும்.

எந்த ஓர் இடத்திலும் ஓரலகு நிறையுள்ள தானே விழும் ஒரு பொருள் g அலகுகள் முடுக்கத்தைப் பெறுவதால்,

புவியீர்ப்பு சார்ந்த ஓர் அலகு = g சார்பிலா அலகுகள். எனவே மெட்ரிக் முறையில் 1 கிராம் எடை = g டைன்கள்.

பிரிட்டன் முறையில் 1 பவு. எடை = g பவுண்டல்கள்.

g-ன் மதிப்பு, இடத்திற்கு இடம் மாறுபடுவதால் கிராம் எடை, பவுண்டு எடை ஆகியவற்றின் மதிப்புகளும் மாறும்.

நிறையும் எடையும் : ஒரு பொருளின் நிறை என்பது அதில் அடங்கியுள்ள பருப்பொருளின் அளவு என அளவியல் பகுதியில் வரையறுக்கப்பட்டது. எனினும், அந்த வரையறை தெளிவான கருத்து எதையும் கொடுக்கவில்லை. நிறையைப்பற்றிய ஒரு தெளிவான கருத்தை நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியிலிருந்து பெறலாம். $F = ma$ அல்லது $a = \frac{F}{m}$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கருது வோமாயின், ஒரு குறிப்பிட்ட விசை ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் போது, அப் பொருளில் ஏற்படும் முடுக்கம் அதன் நிறைக்கு எதிர் விகிதத்திலிருக்கிறது. அதாவது நிறை அதிகமாக இருக்கும் பொருள் தன் நிலையை எளிதில் மாற்றிக்கொள்வதில்லை. எனவே, ஒரு பொருளின் நிறை என்பது அப் பொருள் தன் நிலையை மாற்றிக் கொள்வதில் காட்டும் தயக்கத்தின் அளவை அதாவது அதில் அடங்கியுள்ள நிலைமத்தின் அளவைக் குறிக்கிறது. நிறைக்கு எண் மதிப்பு மட்டுமே உண்டு ; அது எப்போதும் மாருதது; எனவே, நிறை ஒரு ஸ்கேலார் (scalar) ஆகும்.

ஒரு பொருளின் எடை என்பது, அப் பொருளின்மீது செயற் படும் புவியீர்ப்பு விசையாகும். ஒரு பொருளின் நிறை m, ஈர்ப்பு முடுக்கம் g எனில், அதன் எடை,

$$w = mg \text{ சார்பிலா அலகுகள்.}$$

மேலும், $\frac{w}{m} = g.$

ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் g-ன் மதிப்பு மாறிலியாதலால், அந்த இடத்தில் ஒரு பொருளின் எடை அதன் நிறைக்கு நேர்விகிதத்தில்

இருக்கிறது. m_1, m_2 என்ற நிறையைக்கொண்ட பொருள்களின் எடைகள் ஓரிடத்தில் முறையே w_1, w_2 எனில்,

$$w_1 = m_1 g$$

$$w_2 = m_2 g$$

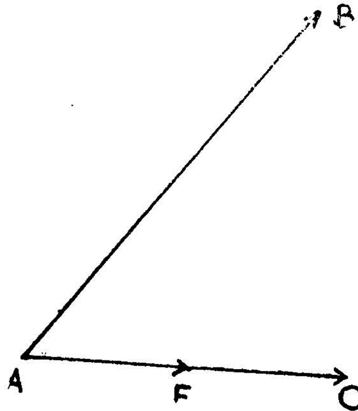
$$\therefore \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

எனவே, இருபொருள்களின் எடைகளை ஒப்புநோக்குவதன்மூலம் அவற்றின் நிறைகளை ஒப்பிடலாம். ஒரு பொருளின் நிறையைப் பௌதிகத் தராசின் உதவியாலும் எடையை வில் தராசின் உதவியாலும் எவ்வாறு மதிப்பிடலாம் என்று முதல் பகுதியிலேயே கண்டோம்.

விசைகளின் தற்சார்புக் கோட்பாடு : (Physical independance of forces)

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதி விசையை அளக்க நமக்கு உதவுவதோடு மற்றொரு முக்கிய உண்மையையும் தெளிவாக்கு கிறது.

இரண்டாவது விதியின் பிற்பகுதியின்படி, ஒரு விசையின் செயற்பாட்டால் ஏற்படும் உந்த மாறுதல் அல்லது முடுக்கம் அவ் விசையின் திசையிலேயே ஏற்படுகிறது.



படம் 3.1

AB வழியே இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளைக் கருது வோம். [படம் 3·1.] அதன்மீது AC என்ற திசையில் ஒரு

விசை, செயற்படுமாயின் பொருளின் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் AC திசையிலேயே இருக்கும். AB திசையில் அதன் உந்தத்தில் எவ்வித மாறுதலும் ஏற்படாது. பொருளின்மீது வேறு எத்தனை விசைகள் செயற்பட்டாலும், F-ஆல் பொருளின் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் AC திசையிலேயே இருக்கும். எனவே, ஒரு பொருளின் மீது பல்வேறு விசைகள் செயற்படும்போது அவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் தனித்துச்செயற்படும்போது பொருளில் விளைவிக்கக்கூடிய உந்த மாறுபாட்டை விளைவிக்கும். ஆகையால் பொருள் பெறக்கூடிய முடுக்கத்தைக் காண அவ் விசைகளுள் ஒவ்வொன்றும் விளைவிக்கக் கூடிய முடுக்கங்களின் தொகுபயனைக் காணவேண்டும். இவ் வுண்மை விசைகளின் தற்சார்புக் கோட்பாடு எனப்படும். அதனைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

ஒரு பொருளின்மீது பல விசைகள் ஒருங்கே செயற்படும்போது அவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் அவை அப் பொருளின்மீது தனித்து, செயற்படுமாயின் விளைவிக்கக்கூடிய முடுக்கத்தை விளைவிக் கின்றன.

இக் கோட்பாட்டினைப் பின்வரும் நிகழ்ச்சியிலிருந்து தெளிவாக அறியலாம். ரயில் வண்டியில் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒருவர் வண்டியினுள்ளேயே ஒரு பந்தை விழச்செய்வதாகக்கொள்வோம். அது வண்டி நிற்கும்போது வண்டியின் தரையைத் தொடும் அதே புள்ளியில் இப்போதும் தொடும். இது பந்து தொடர்ந்து வண்டியின் திசையிலேயே செல்கிறது என்பதையும் பந்தின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்புவிசை அதன் திசையில்மட்டுமே பந்தின் திசை வேகத்தை மாற்றுகிறது என்பதையும் காட்டுகிறது

மூன்றுவது விதி: இவ் விதியிலிருந்து விசைகள் தனித்துச் செயற்படுவதில்லை; அவை எப்போதும் சோடியாகவே செயற் படுகின்றன என்பது விளங்குகிறது. ஆனால், சோடியிலுள்ள விசைகள் ஒருபோதும் ஒரு பொருளில் செயற்படுவதில்லை; எனவே, அவை சம நிலையை விளைவிக்க முடியாது.

மேசைமீது வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பொருள் அதன் எடைக்குச் சமமான விசையை மேசையின்மீது செயற்படுத்துகிறது. மேசையோ புத்தகத்தின் அவ் விசைக்கு எதிரான சமமான விசை ஒன்றைப் புத்தகத்தின்மீது செயற்படுத்துகிறது.

ஒரு கயிற்றில் கட்டப்பட்ட ஒரு பொருளை ஒருவர் பிடித்துக் கொண்டிருக்கும்போது, பொருள் அவர் கையின்மீது அதன் எடைக்குச் சமமான ஒரு விசையைச் செயற்படுத்துகிறது. அதே

சமயத்தில் கை அதற்குச் சமமான எதிர்விசை ஒன்றுடன் பொருளை மேலே தூக்குகிறது.

ஒரு குதிரை ஒரு வண்டியை ஒரு கயிற்றின்மூலம் ஒரு விசையுடன் இழுக்கும்போது, வண்டி அதே விசையுடன் குதிரையை இழுக்கிறது. அவ்வாறாயின் வண்டி எவ்வாறு நகருகிறது? பிரச்னையைச் சற்று கூர்ந்து கவனிப்போமாயின் உண்மை விளங்கும். குதிரை வண்டியைக் கயிற்றின் மூலம் இழுக்க முயலும்போது அது தரையைத் தன் குளம்புகளால் பின்னோக்கித் தள்ளுகிறது. எனவே, தரை அதற்கு எதிர்விசையான உராய்வு ஒன்றைக் குதிரைமீது முன்னோக்கிச் செயற்படுத்துகிறது. குதிரை மீது 1. தரை முன்னோக்கிச் செயற்படுத்தும் உராய்வு, 2. வண்டி கயிற்றின்மூலம் அதன்மீது பின்னோக்கிச் செயற்படுத்தும் விசை ஆகிய இவ் விரு விசைகளுள் உராய்வு அதிக மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும் ஆதலால் குதிரை முன்னோக்கி நகருகிறது. தரை வழவழப்பா யிருக்கும்போது, குதிரை வண்டியை இழுக்கக் கடும் முயற்சி தேவைப்படுகிறது என்ற அனுபவ உண்மையிலிருந்து இதனை விளங்கிக்கொள்ளலாம்.

உந்த அழிவின்மை விதி : மூன்றாவது விதியிலிருந்து உந்த அழிவின்மை விதி (Law of conservation of momentum) என்னும் ஒரு முக்கியமான விதியைப் பெறலாம். அவ்விதி பின்வருமாறு கூறப்பெறுகிறது :

ஒன்றுக்கொன்று செயலெதிர்ச் செயற்படும் பொருள்கள் அடங்கிய ஓர் அமைப்பில் எந்தவொரு திசையிலும் உள்ள மொத்த உந்தம் மாறாமல் இருக்கும். அல்லது ஒன்றுக்கு மேற் பட்ட பொருள்கள் மோதிக் கொள்ளும்போது, மோதலுக்குமுன் உள்ள மொத்த உந்தம் மோதலுக்குப் பின் உள்ள மொத்த உந்தத்திற்குச் சமம்.

இவ் விதியை மூன்றாவது விதியிலிருந்து கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

m_1, m_2 என்ற நிறைகளையும் முறையே u_1, u_2 என்ற திசை வேகங்களையும் கொண்ட A, B என்ற பொருள்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக்கொள்வதாகக் கருதுவோம். மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் திசை வேகங்கள் முறையே, v_1, v_2 என இருக்கட்டும். மோதலின் போது அவை ஒன்றையொன்று தொடும் நேரம் t வினாடி ஆகட்டும். மேலும், A, B-ன்மீது F_1 என்ற விசையையும், B, A-ன்மீது F_2 என்ற விசையையும் செயற்படுத்துவதாகக் கொள்வோம்.

நியூட்டனின் மூன்றுவது விதிப்படி $F_1 = F_2$

F_1 என்ற விசை B-ன்மீது செயற்பட்டு அதன் உந்தத்தை t விஞடிகளில் $m_2 u_2$-லிருந்து $m_2 v_2$-க்கு மாற்றுவதால் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$F_1 = m_2 \frac{(v_2 - u_2)}{t}$$

அவ்வாறே, $F_2 = m_1 \frac{(v_1 - u_1)}{t}$

எனவே, மூன்றுவது விதிப்படி,

$$m_2 \frac{(v_2 - u_2)}{t} = -m_1 \frac{(v_1 - u_1)}{t}$$

$$m_2 v_2 - m_2 u_2 = -m_1 v_1 + m_1 u_1$$

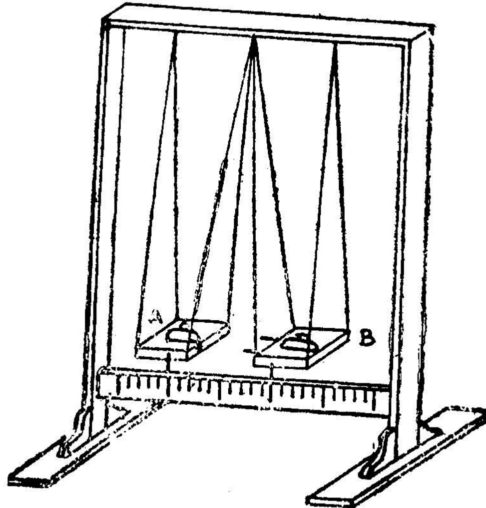
அதாவது, $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

எனவே, மோதலுக்குமுன் மொத்த உந்தம்

= மோதலுக்குப் பின் மொத்த உந்தம்.

உந்தம் அழிவின்மை விதியை நிரூபித்தல் : ஹிக்கின் உந்தவியல் தராசு (Hick's ballistic balance) என்னும் கருவியைக் கொண்டு உந்த அழிவின்மை விதியை நிரூபிக்கலாம்.

உந்தவியல் தராசின் அமைப்பைப் படம் 3·2-ல் காணலாம்.



படம் 3·2

படத்தில் A, B என்பன இரண்டு இலேசான மேடைகள். அவை

ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு குறிமுள் உள்ளது. குறி முட்கள் கிடைமட்டத்தில் உள்ள ஓர் அளவு கோலின் முன் அசையக்கூடியனவாயுள்ளன. A என்ற மேடையில் B-ஐ நோக்கும் பக்கத்தில் இரு சிறு முனைகளும் அவற்றிற்கு எதிரே B-ன் பக்கத்தில் இரு துளைகளும் உள்ளன. இதனுல் அவை இரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிய பின், இரண்டும் சேர்ந்து ஓர் ஒற்றைப் பொருளாக நகரும்.

மதிப்புத் தெரிந்த m_1, m_2 என்ற நிறைகளை முறையே A, B மேடைகளில் வைக்கவேண்டும். மேடைகளை முறையே s_1 s_2 என்ற சிறு தொலைவுகளுக்கு எதிர்த்திசைகளில் ஒரே சமயத்தில் நகர்த்தி விடவேண்டும். அவை ஒன்றுடன் ஒன்று மோதியவுடன் இரண்டும் ஒன்ருக இணைந்து ஒருங்கே அசையும். அவ்வாறு அவை நகர்ந்த தொலைவைக் கணக்கிட்டு அதனை s எனக் கொள்வோம்.

இனி, மேடைகள் நகர்த்தப்பட்ட தொலைவுகள் (s_1, s_2) சிறியவையாதலால் மோதுவதற்குமுன் மேடைகளின் திசைவேகங்கள் அவை நகர்த்தப்பட்ட தொலைவுகளுக்கு நேர்விகிதத்திலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். மேலும், m_1, m_2 ஆகியவற்றை ஒப்பு நோக்குமிடத்து மேடைகளின் நிறைகள் மிகச் சிறியனவாக இருப்பதாகக் கொள்வோமாயின்,

மோதலுக்கு முன் மொத்த உந்தம் $\propto m_1s_1 + m_2s_2$

மோதலுக்குப் பின் மொத்த உந்தம் $\propto (m_1 + m_2)s$

s_1, s_2, s ஆகியவற்றிற்குத் தக்க குறியீடுகளைக் கொடுப்போமாயின்,

$$(m_1 + m_2)\, s = m_1s_1 + m_2s_2$$ என்பதைக் காணலாம்.

m_1, m_2 ஆகியவற்றின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குச் சோதனையைத் திருப்பிச்செய்து ஒவ்வொரு முறையும் மோதலுக்குப்பின் மொத்த உந்தம் அதே திசையில் மோதலுக்குமுன் உள்ள மொத்த உந்தத்திற்குச் சமமாயிருப்பதைக் காணலாம்.

உந்தம் அழிவின்மை விதியின் அடிப்படையில் துப்பாக்கியின் பின்னசைவை (recoil) விளக்கலாம்.

இங்குத் துப்பாக்கியும் குண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செயலெதிர்ச் செயற்படும் பொருள்களாகும். துப்பாக்கி சுடப்பட்டவுடன் அதிலுள்ள வெடிமருந்து பேரழுத்தமுள்ள வாயுவாக மாறிக் குண்டினை முன்னேக்கித் தள்ளுகிறது. குண்டு அதே விசையுடன் துப்பாக்கியைப் பின்னேக்கித் தள்ளுகிறது.

சுடப்படுமுன் துப்பாக்கி, குண்டு ஆகிய இரண்டின் மொத்த உந்தம் சுழியாகும். சுடப்பட்ட பின், குண்டின் திசை வேகம் V_B எனவும் துப்பாக்கியின் திசைவேகம் V_R எனவும் அவற்றின் நிறைகள் முறையே M_B, M_R எனவும் கொள்வோமாயின், உந்தம் அழிவின்மை விதிப்படி,

மோதலுக்குப் பின் மொத்த உந்தம் $= M_R V_R + M_B V_B = 0$

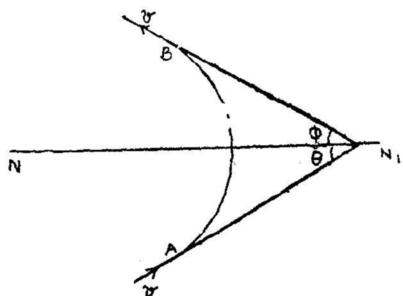
$$\therefore \quad M_R V_R = -M_B V_B$$

எனவே, குண்டு முன்னோக்கிப் பாயும்போது, துப்பாக்கி பின்னோக்கி அசைகிறது.

டர்பைன்களும் ஜெட் இயக்கமும் (Turbines and Jet propulsion)

டர்பைன்கள் : டர்பைன்கள் நியூட்டனின் இரண்டாவது அடியை அடிப்படையாகக் கொண்டவையாகும். ஒரு நீர்ப்பீற்று நிலையான அல்லது அசையும் தட்டு ஒன்றின்மீது மோதுமாயின், அதன் உந்தம் மாறும் வீதத்திற்குச் சமமான ஒன்றைத் தட்டின்மீது செயற்படுத்தும்.

நிலையான தட்டு ஒன்றின்மீது செயற்படும் விசை : AB என்ற வளைந்த தட்டின்மீது அதன் மையத்தில் வரையப்பட்ட லம்பத்துடன் (NN_1) θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் v என்ற திசைவேகத்துடன் ஒரு நீர்ப்பீற்று (jet of water) மோதுவதாகக் கொள்வோம். தட்டுக்கும் நீர்ப்பீற்றுக்கும் இடையே உராய்வு இல்லையெனக் கருதுவோமாயின், நீர்ப்பீற்று v என்ற அதே வேகத்துடன் ஆனால், வேறுதிசையில், அதாவது லம்பத்துடன் ϕ என்ற



படம் 3·3

கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் தட்டிலிருந்து செல்லும்.

[படம் 3·3] லம்பத்திற்கு இணையான திசையில் நீர்ப்பீற்றின் தொடக்க, இறுதித் திசைவேகங்களின் ஆக்கக்கூறுகளைக் காணின், அத் திசையில் திசைவேக மாறுபாடு $= v \cos \theta - (-v \cos \phi)$

$$= v(\cos \theta + \cos \phi)$$

எனவே, ஒரு வினாடியில் தட்டுடன் மோதும் நீரின் நிறை m எனில் உந்தம் மாறும் வீதம்,

$$= mv(\cos \theta + \cos \phi)$$

எனவே, தட்டின்மீது அதன் லம்பத் திசையில் செயற்படும் விசை, $= mv(\cos \theta + \cos \phi)$

அவ்வாறே தட்டின்மீது தொடுவரை திசையில் செயற்படும் விசை, $= mv(\sin \theta - \sin \phi)$

நீர்ப்பீற்றின் குறுக்குப் பரப்பளவு 'a', நீரின் அடர்த்தி p எனில் $m = vap$ ஆகும்.

அசையும் தட்டின்மீது செயற்படும் விசை: தட்டு லம்பத் திசையில் (nn_1 திசையில்) நகருமாயின், நீர்ப்பீற்று தட்டை மோதும் போதும் தட்டைவிட்டு விலகும்போதும் லம்பத்திசையில் அதன் சார்புத்திசை வேகங்களைக் கருத்திற் கொள்ளவேண்டும். அவற்றை முறையே v_1, v_2 எனக் கொள்வோமாயின், லம்பத்திசைக்கு இணையாக அதன் திசைவேக மாறுபாடு $v_1 - (-v_2) = (v_1 + v_2)$. எனவே, தட்டின்மீது செயற்படும் விசை $m(v_1 + v_2)$ ஆகும். (m என்பது தட்டின்மீது ஒரு வினாடியில் மோதும் நீரின் எடை).

தட்டின்மீது பீற்று மோதும்போது அதன் திசை வேகம் v எனில், அது $\frac{1}{2} mv^2$ என்ற இயக்க ஆற்றலுடன் மோதுகிறது. பீற்று தட்டைவிட்டு விலகும்போது அதன் திசைவேகம் V எனில், அது $\frac{1}{2} mV^2$ என்னும் இயக்க ஆற்றலுடன் விலகுகிறது. அவ் விரு இயக்க ஆற்றல்களுக்குமிடையேயுள்ள வேறுபாடு $\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mV^2$ தட்டை இயக்கப் பயன்படுவதால்,

$$\text{பயனுறு திறன்} = \frac{\text{வெளிப்படும் பயனுறு ஆற்றல்}}{\text{செலுத்தப்பட்ட ஆற்றல்}}$$

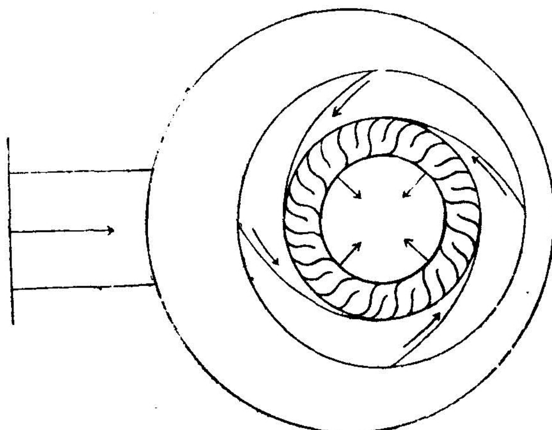
$$= \frac{\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mV^2}{\frac{1}{2} mv^2}$$

$$= 1 - \frac{V^2}{v^2}$$

ஆகும். V=O ஆனால்; அதாவது பீற்று தட்டைவிட்டுச் சுழி திசை வேகத்துடன் விலகுமாயின், பயனுறு திறன் பெருமமாக இருக்கும். அன்றி, பீற்று தட்டைவிட்டு விலகும்போது அது ஒரு திசை வேகத்துடன் விலகுமாயின், அது தட்டின்மீது எவ்வித அதிர்ச்சியையும் செயற்படுத்தாதிருக்கும்போது அதாவது, பீற்று தட்டின் தொடு கோட்டுத் திசையில் விலகும்பொழுது பயனுறு திறன் மிகுதியாக (ஆனால், ஒன்றைவிடக் குறைவானது), இருக்கும்.

இனி, மேற்கூறப்பட்ட தத்துவங்களின் அடிப்படையிலமைந்த சில டர்பைன்களைப்பற்றிப் பார்ப்போம். டர்பைன்கள் உயரத்திலிருந்து வரும் நீரின் இயக்க ஆற்றலை எந்திரங்களை இயக்கும் வகையில் மாற்றும் கருவிகளாகும். தகடுகள் பொருத்தப்பட்ட சக்கரம் ஒன்று (நீரை) வழிபடுத்துத் தகடுகள் பொருத்தப்பட்ட பொதியுறையினுள் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்ட கருவிகள், டர்பைன்கள் எனப்படும். பொதியுறையினுள் நுழையும் நீரானது சக்கரத் தகடுகளை அவற்றின் தொடுகோட்டுத் திசையில் மோதுமாறு அதன் திசையை வழிபடுத்துத் தகடுகள் தக்கவாறு மாற்றியமைக்கின்றன. இதனால் பீற்றானது தகடுகளுக்கு அதிர்ச்சியூட்டாமல் அவற்றின் மீது மோதுகிறது. டர்பைன்கள் இருவகைப்படும். 1. எதிர்விசை டர்பைன்கள், 2. தாக்கு டர்பைன்கள். இவற்றைப்பற்றி இங்குச் சுருக்கமாகக் காண்போம்.

எதிர்விசை டர்பைன்கள்: (Reaction turbines) இவ் வகை டர்பைன்களில் அவற்றை இயக்கும் பீற்றின் ஆற்றலில் ஒரு பகுதி

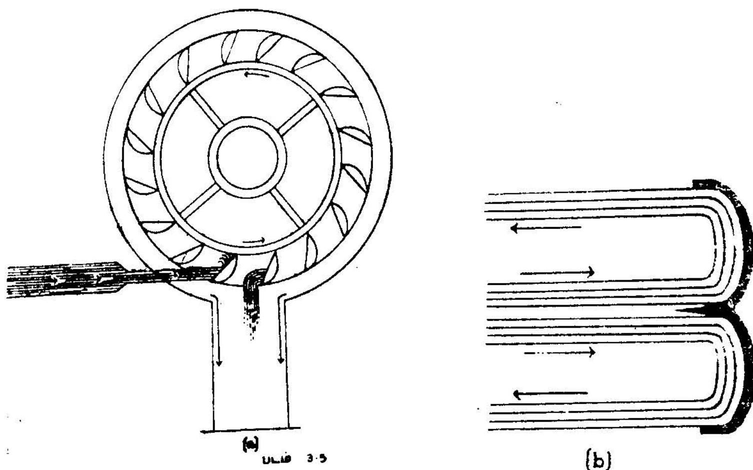


படம். 3·4

நிலையாற்றலாகவும் ஒரு பகுதி இயக்க ஆற்றலாகவும் அமைகின்றன. தாம்சன் டர்பைன் (Thomson's turbine) இவ் வகை

டர்பைன்களுக்கான ஓர் எடுத்துக்காட்டு ஆகும். இதன் அமைப்பைப் படம் 3·4-ல் காணலாம். இதனுள் நுழையும் நீரானது நான்கு வழிபடுத்துத் தகடுகளால் அதனுள் இயங்கும் ஒரு சக்கரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள தகடுகளின்மீது மோதுகிறது. வழிபடுத்துத் தகடுகளும் சக்கரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள தகடுகளும் பீற்றுனது அவற்றின்மீது தொடுகோட்டுத் திசையில் மோதுமாறும், அவற்றை விட்டுத் தொடுகோட்டுத் திசையில் விலகுமாறும் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. எதிர்விசை டர்பைன்கள் இயங்கும்போது அவை முழுவதும் நீரால் நிரம்பியிருக்க வேண்டும்.

தாக்கு டர்பைன்கள்: (Impulse turbines): இவ்வகை டர்பைன்களில் அவற்றுள் நுழையும் நீரின் ஆற்றல் முழுவதும்



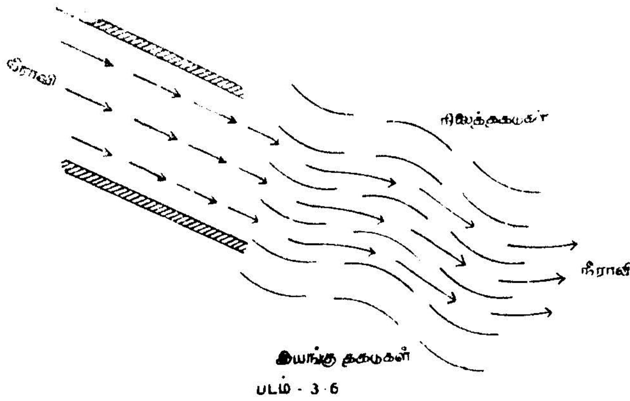
படம் 3·5

இயக்க ஆற்றல் வடிவில் இருக்கும். பெல்ட்டன் சக்கரம் (Pelton-wheel) என்பது இவ் வகை டர்பைன்களுக்கான ஓர் எடுத்துக்காட்டு ஆகும். இதன் அமைப்பைப் படம் 3·5-ல் காணலாம். இதில் ஓர் எஃகுச் சக்கரம் ஒரு பொதியுறையினுள் இயங்குகிறது. அச் சக்கரத்தின் விளிம்பில் கோப்பைபோன்ற தகடுகள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. மிகுந்த அழுத்தத்திலிலுள்ள ஒரு நீர் பீற்று சக்கரத்தின் அடிப்பகுதியிலுள்ள தகடுகளின்மீது மோதுமாறு செய்யப்படுகிறது. பயனுறு திறன் மிகுதியாக இருப்பதற்கேற்பச் சக்கரத்தகடுகள் அரைக்கோள வடிவில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

நீர்ப்பீற்றிற்குப் பதிலாக. மிகுந்த அழுத்தத்தில் வெளிப்படும் நீராவிப் பீற்றையும் பயன்படுத்தலாம். அத்தகைய டர்பைன்கள் நீராவி டர்பைன்கள் (Steam turbines) எனப்படும். அனல்

மின்சார நிலையங்களில் டைனமோக்களை இயக்கவும் பெருங்கப்பல்களை இயக்கவும் நீராவி டர்பைன்கள் பயன்படுகின்றன. அத்தகைய நீராவி டர்பைன்களுள் ஒன்றான பார்சன் எதிர்விசை டர்பைனை (Parzon's reaction turbine)ப் பற்றி இங்குக் காண்போம்.

பார்சன் எதிர்விசை டர்பைனில் மிகுந்த அழுத்தத்தில் அதனுள் நுழையும் நீராவி விரிவடைவதால் சக்கரம் இயக்கப்படுகிறது. இவ்வகை டர்பைனில் தகடுகள் பொருத்தப்பட்ட பல சக்கரங்கள் உள்ளன. அவை யாவும் ஒரே அச்சில் பொருத்தப்பட்டுள்ளன.



படம் - 3·6

டர்பைனுள் நுழையும் நீராவி முதற் சக்கரத்தின் தகடுகளின்மீது மோதி, அதனை முன்னர்க் கூறப்பட்ட டர்பைன்களிலுள்ளதுபோல் இயக்குகிறது. ஆனால், அதன் பின்னர் வெளிப்படும் நீராவி சேதமுறாமல் ஒரு தொகுதி நிலையான தகடுகளின்வழியே விரிவடையுமாறு செய்யப்பட்டு, அடுத்த சக்கரத்தின் தகடுகளின்மீது மோதுமாறு செய்யப்படுகிறது. எல்லாச் சக்கரங்களும் ஒரே அச்சில் பொருத்தப்பட்டிருப்பதால் அச்சு அதிக வேகத்துடன் சுழலும்.

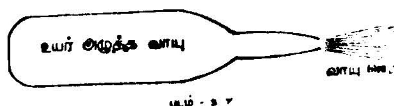
நவீன டர்பைன்களில் ஏறத்தாழ 20 சக்கரங்கள் பொருத்தப்பட்டிருக்கும். ஒவ்வொரு சக்கரத்தின் விட்டமும் அதற்கு முந்தியதைவிட அதிகமாக இருக்கும். இதனால் நீராவி விரிவடைவதால் ஏற்படும் ஆற்றலிழப்பை ஓரளவு ஈடுசெய்ய முடிகிறது. இத்தகைய டர்பைன்களில் 100,000 குதிரைத் திறனுக்கும் மேற்பட்ட திறனையும் உருவாக்க முடிகிறது.

நீராவி டர்பைன்கள் நீராவி எஞ்சின்களைவிட எளியனவாகவும் அளவில் சிறியனவாயும் இருக்கின்றன. மேலும், அவை நீராவி

எஞ்சின்களைவிட அதிக வேகத்துடனும் இயங்குவதால், மின்னாக்கிகளை (dynamo) இயக்குவதற்குப் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

ஜெட் இயக்கம்: ஜெட் இயக்கம் நியூட்டனின் மூன்றாவது விதியை அதாவது ஒவ்வொரு விசைக்கும் அதற்குச் சமமான எதிர் விசை உண்டு என்னும் விதியை அடிப்படையாகக் கொண்டது. துப்பாக்கி ஒன்றிலிருந்து சுடப்பட்ட குண்டின் இயக்கம், அதற்கு எதிர்த் திசையில் துப்பாக்கிக்கும் ஓர் இயக்கத்தை அளிக்கிறது என்று கண்டோம். மேலும், பலூன் ஒன்றில் உயர்ந்த அழுத்தத்தில் காற்றை நிரப்பி அக் காற்று பலூனிலிருந்து ஒரு சிறு துவாரமாக வெளிவரச்செய்து பலூனை விட்டுவிட்டால், பலூனிலிருந்து காற்று வெளிப்படும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் பலூன் இயங்குவதைக் காணலாம். இதே தத்துவத்தில் அமைந்ததுதான் ஜெட் இயக்கமும்.

இவ் வகை இயக்கத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட எஞ்சின்கள், ஜெட் எஞ்சின்கள் (Jet engines) எனப்படும். இவற்றில் ஓர் எரிபொருள் ஓர் அறையினுள் எரிக்கப்படுவதால் உருவாகும் வாயுக்கள் அறையின் பின்புறம் உள்ள ஒரு சிறு துவாரம் வழியாக



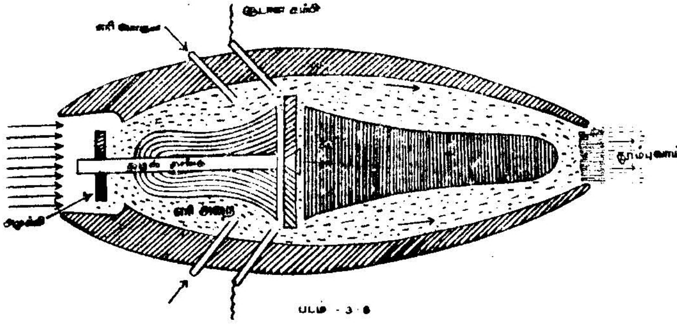
படம் - 3.7

வேகமாக வெளியேறுவதால், அறை முன்னோக்கி வேகமாக இயக்கப்படுகிறது (படம் 3.7).

ஜெட் எஞ்சின்களில் பலவகை உண்டு. அவற்றுள் ஒரு சிலவற்றின் தத்துவங்களைப்பற்றி இங்குக் காண்போம்.

டர்போ-ஜெட் எஞ்சின் (Turbo jet engine): இதன் எளிய அமைப்பைப் படம் 3.8-ல் காணலாம். இதில் உள்ள அழுத்தி (compressor) சுழல்வதால் முன் பகுதியின் வழியாகக் காற்று உள்ளிழுக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு இழுக்கப்படும் காற்று மிக அதிக அழுத்தத்துடன் எரி அறையை நோக்கிச் சென்று அங்குக் கல்லெண்ணெய் (gasoline), மண்ணெண்ணெய் போன்ற எரிபொருள் திவலைகளுடன் கலக்கிறது. அத்தகைய கலவையை அங்குள்ள வெப்பமான கம்பிகள் தீயூட்டுகின்றன. இதனால் ஏற்படும் வெப்பம் எரி அறையினுள் உள்ள வாயுக்களின் அழுத்தத்தை

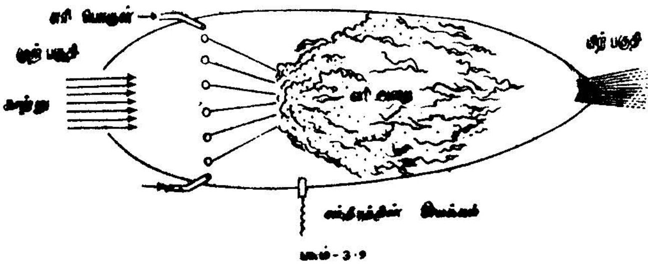
மிக அதிகமாக்குகிறது. இவ்வாறு மிகுந்த அழுத்தத்திற்குட்பட்ட வாயுக்கள் எஞ்சினின் பின்புறத்திலுள்ள சிறு துவாரத்தின் வழியாக மிகுந்த முடுக்கத்துடன் வெளியேறி, எஞ்சினை முன்னேக்கி மிகுந்த வேகத்துடன் இயக்குகின்றன.



படம் - 3·8

இதில் உள்ள அழுத்தியானது, தொடக்கத்தில் மின்சுழற்றி அல்லது அழுத்தப்பட்ட காற்றினுல் சுழற்றப்படுகிறது. எஞ்சின் செயலாற்றத் தொடங்கியதும் வெளியேறும் வாயுக்கள் எஞ்சின் நடுவிலுள்ள ஒரு சுழலியைச் (turbine) சுழற்றுகின்றன. அதன் பின்னர் இச் சுழலி அழுத்தியைச் சுழற்றுகிறது. இத்தகைய எஞ்சினை ஓய்விலிருந்து இயக்கலாம். இத்தகைய எஞ்சின் பொருத்தப்பட்ட விமானங்கள் மணிக்கு 1000 கி. மீ. வேகத்திற்கும் அதிகமான வேகத்துடன் இயங்குகின்றன.

தொடர் ஜெட் எஞ்சின் (Continuous Duct engine): இதன் எளிய அமைப்பைப் படம் 3·9-ல் காணலாம். இதில் இரு புறமும் திறந்த, படத்திலுள்ளதைப்போலமைந்த ஒரு குழாய் உள்ளது. இது



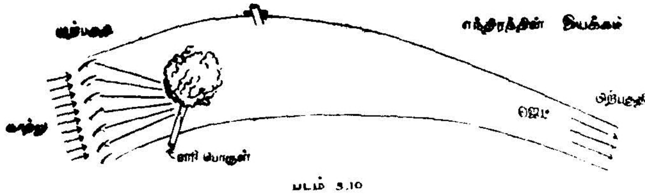
படம் - 3·9

செயற்படத் தொடங்குமுன், காற்றின் வழியாக மிக அதிக வேகத்துடன் இயங்கவேண்டும். பொதுவாகக் கூறுமிடத்து இந்த

எஞ்சின்கள் ஒலி வேகத்தை மிஞ்சிய வேகங்களில் மிக்க திறமையுடன் செயலாற்றுகின்றன.

முன்புறமாக எஞ்சினுக்குள் நுழையும் காற்றின் வேகமானது காற்று நுழைந்தவுடன் குழாயின் அதிகவிட்டப் பகுதியை அடைவதால் குறைகிறது. எனவே, மேலும் உள்நோக்கி நுழையும் காற்றினுல் அழுத்தப்பட்டு, எரி அறையை அடைகிறது. அங்குக் கல்லெண்ணெய் போன்ற எரிபொருள் திவலைகளுடன் கலந்து தீயூட்டப்படுகிறது. இதனுல் விளையும் மிகுந்த அழுத்தத்திலுள்ள வாயுக்கள் எஞ்சினின் பின்புறத் துவாரத்தின் வழியே வேகமாக வெளியேறி, எஞ்சினை முன்னேக்கி மிக வேகமாக இயக்குகின்றன. இந்த எஞ்சின் அதனுள் மிக அதிக அளவில் காற்று நுழையும் வரை இயங்கத் தொடங்காது. ஆனுல், இயங்கத் தொடங்கியவுடன் அதன் மிகஅதிக வேகத்தின் பயனுய்த் தேவையான அளவு காற்றை அது எடுத்துக்கொள்ளும். கோட்பாட்டளவில் அதன் வேகத்திற்கு எல்லையே கிடையாது.

தொடரிலா ஜெட் எஞ்சின் (Intermittent Duct engine): இதன் அமைப்பைப் படம் 3·10-ல் காணலாம். இவ் வகை எஞ்சின்களும் அவை செயலாற்றத் தொடங்குமுன், மிக அதிக வேகத்தில் இயங்க



படம் 3.10

வேண்டும். அவ்வாறு மிக வேகத்தில் இயங்கும்போது, அவற்றின் முன்புறம் உள்ள வால்வுகளின் வழியாகக் காற்று உள் நுழைகிறது. இந்த வால்வுகள், எஞ்சினுக்குள் இருக்கும் காற்றுனது மிகுந்த அழுத்தத்தின் காரணமாக வெளிச்செல்ல முயலும்போது மூடிக் கொள்ளுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளன. உள் நுழையும் காற்று அங்குள்ள காற்றை அழுத்தி அதிக அழுத்தத்தை விளைவிக்கிறது. இந் நிலையில் எரிபொருள் செலுத்தப்பட்டுத் தீயூட்டப்படுகிறது. இதன் பயனுய் விளையும் மிக அதிக அழுத்தம் வால்வுகளை மூடச் செய்வதுடன் எஞ்சினின் பின்புறம் வழியாக மிக்க அழுத்தத்துடன் வாயுக்களை வெளித் தள்ளுகிறது. எனவே, எஞ்சின் முன்னேக்கி இயங்குகிறது. இவ்வாறு வாயுக்கள் வெளித்தள்ளப்படுவதால் வால்வுகளுக்கருகில் அழுத்தம் குறைகிறது. எனவே வெளிக்

காற்று வால்வுகளைத் திறந்துகொண்டு எஞ்சினுக்குள் நுழைகிறது. இங்கு எஞ்சின்மீது செயற்படும் அமுக்கம் விட்டுவிட்டுச் செயற்படுகிறது.

இதுவரை கூறப்பட்ட ஜெட் எஞ்சின்களில் எரிபொருள்கள் வளிமண்டலக் காற்றிலுள்ள ஆக்ஸிஜனைப் பயன்படுத்திக்கொண்டு எரிகின்றன. இவற்றையன்றி வளிமண்டலத்திலுள்ள ஆக்ஸிஜனைச் சார்ந்திராமல் திரவ ஆக்ஸிஜனைப் பயன்படுத்தும் ஜெட் எஞ்சின்களும் உண்டு. அவை ராக்கெட் எஞ்சின்கள் என அழைக்கப்பெறுகின்றன. இந்தத் திரவ ஆக்ஸிஜன் எஞ்சினில் உள்ள ஒரு தனி அறையில் வைக்கப்பட்டு, எரிபொருள்களுடன் தக்க அளவில் தக்க முறையில் கலக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு திரவ ஆக்ஸிஜன் கலக்கப்பட்ட எரிபொருள் எரி அறையினுள் செலுத்தப்பட்டுத் தீமூட்டப்படுகிறது. இத்தகைய ராக்கெட்டுகள் வளிமண்டலக் காற்றிலுள்ள ஆக்ஸிஜனைச் சார்ந்திராததால், புவியின் வளிமண்டலத்திற்கு அப்பாலும் செல்லும் செயற்கைக் கோள்களையும் சந்திரப் பெட்டகங்களையும் இயக்கவல்லன.

மாதிரிக் கணக்கு 1. ஓய்வில் இருக்கும் 15 பவு. நிறை ஒன்றின் மீது, 30 பவுண்டல்கள் விசை ஒன்று 5 வினாடிகளுக்குச் செயற்படுகிறது. இந் நிலையில் அந்த நிறையை 2 வினாடிகளில் நிறுத்துவதற்குத் தேவைப்படும் விசை என்ன?

பொருளின் முடுக்கம்

பொருளின்மீது செயற்படும் விசை $F = 30$ பவுண்டல்கள்

பொருளின் நிறை $m = 15$ பவு.

∴ முடுக்கம் $a = \frac{F}{m}$

$= \frac{30}{15}$ அடி/வி^{2}

$a = 2$ அடி/வி^{2}

5 வினாடிகளின் இறுதியில் அதன் திசை வேகம்

தொடக்கத் திசை வேகம் $u = 0$

முடுக்கம் $a = 2$ அடி/வி^{2}

நேரம் $t = 5$ வி.

இறுதித் திசை வேகம் $v = u + at$

$= 0 + 2 \times 5$

∴ $v = 10$ அடி/வி.

2 வினாடிகளில் நிற்பதற்குத் தேவையான எதிர் முடுக்கம்

தொடக்கத் திசை வேகம் $u = 10$ அடி/வி.

இறுதித் திசை வேகம் $v = 0$

நேரம் $t = 2$ வி.

முடுக்கம் $a = \frac{v-u}{t}$

$= \frac{-10}{2}$

$= -5$ அடி/வி^{2}

∴ எதிர் முடுக்கம் (r) $= 5$ அடி/வி^{2}

நிறுத்துவதற்குத் தேவையான

விசை $F = ma$

$= 15 \times 5$ பவுண்டல்கள்

$F = 75$ பவுண்டல்கள்.

மாதிரிக் கணக்கு 2. 200 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் 100க்கு 1 சரிவுப் பாதையின் அடியை அடையும்போது, நீராவி மூடப்படுகிறது. காற்று, உராய்வு முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடை (எதிர்விசை) டன்னுக்கு 10 பவு. என்றால், இரயில் வண்டி நிற்பதற்குமுன் எவ்வளவு தொலைவு செல்லும்?

எதிர் முடுக்கம்

காற்று, உராய்வு முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடை

$= 200 \times 10$ பவு. எடை

$= 200 \times 10 \times 32$ பவுண்டல்கள்

இரயில் வண்டியின் நிறை $= 200 \times 2240$ பவுண்டு

காற்று, உராய்வு முதலியவற்றால் ஏற்படும் எதிர் முடுக்கம்

$= \frac{200 \times 10 \times 32}{200 \times 2240}$ அடி/வி^{2}

$= \frac{1}{7}$ அடி/வி^{2}

சரிவினால் ஏற்படும் எதிர்முடுக்கம்

$= g \sin \theta$

$= 32 \times \frac{1}{100}$ அடி/வி^{2}

$= \frac{32}{100}$ அடி/வி^{2}

எனவே, தொகுபயன் எதிர் முடுக்கம்

$$=\left(\frac{1}{7}+\frac{32}{100}\right) \text{ அடி/வி}^2$$

$$=\frac{324}{700} \text{ அடி/வி}^2$$

தொலைவு : தொடக்கத் திசை வேகம்

$$u = 30 \text{ மை/மணி}$$

$$= 44 \text{ அடி/வி.}$$

இறுதித் திசைவேகம் $v = 0$

முடுக்கம் $(a) = -$ எதிர்முடுக்கம் $= -\frac{324}{700}$ அடி/வி^{2}

எனவே, இரயில் வண்டி கடக்கும் தொலைவு

$$s = \frac{v^2 - u^2}{2a} \text{ (சமன் 2.14)}$$

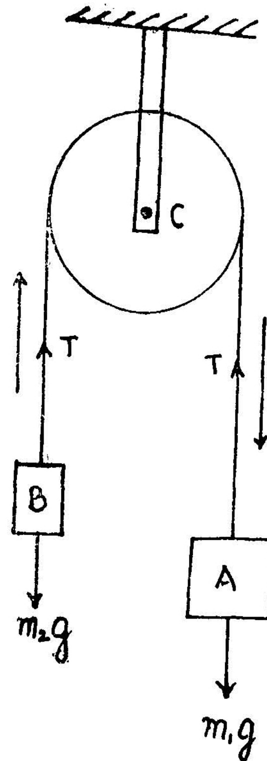
$$= \frac{44 \times 44 \times 700}{2 \times 324}$$

$$= 2091{\cdot}3 \text{ அடிகள்.}$$

ஒரு கயிற்றால் இணைக்கப்பட்ட இரு துகள் களின் இயக்கம்

m_1, m_2 என்ற நிறைகளைக் கொண்ட இரு பொருள்கள் ஒரு நிலையான, உராய்வற்ற, இலேசான கப்பியின் மீது செல்லும் இலேசான விரிவுபடாத கயிற்றின் இரு முனைகளிலிருந்தும் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. m_1, m_2 ஐ விட அதிகமாயிருப்பின், நிறைகள் பெறும் முடுக்கத்தையும் கயிற்றின் இழுவிசையையும் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

படம் 3·11-ல் A, B என்பன முறையே m_1, m_2 என்ற நிறைகளைக் கொண்ட இரு பொருள்களையும், P என்பது கப்பியையும் குறிக்கின்றன. கயிறு விரிவுபடாத தன்மையையுடையதாலும் கப்பி உராய்வற்றிருப்பதாலும் கயிறு முழுவதும் இழுவிசை ஒரே அளவாய் இருப்பதாய்க் கொள்ளலாம். அதனை T எனக் கொள்வோம். கயிறும் கப்பியும் இலேசானதாகையால், m_1, m_2 ஆகியவற்றை நோக்குமிடத்து அவற்றை மிக மிகச் சிறியவையாகக் கருதலாம்.



படம் 3·11

A, B ஆகியவற்றின் இயக்கங்களைப்பற்றிப் பார்ப்போமாயின், m_1, m_2-ஐ விட அதிகமாயிருப்பதால், m, கீழ் நோக்கியும் m_2 மேல் நோக்கியும் ஒரே முடுக்கத்துடன் இயங்கும். அம் முடுக்கம் 'a' எனக் கொள்வோம்.

மேலும், A-ஐ நோக்குமிடத்து அதன்மீது செயற்படும் விசைகள் (i) கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை $= m_1 g$

(ii) மேல் நோக்கிச் செயற்படும் கயிற்றின் இழுவிசை $= T$

A, கீழ் நோக்கி நகருவதால் அதன்மீது கீழ் நோக்கிச் செயற்படும் விசை $m_1 g - T$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, அந்த விசை $m_1 a$ ஆகும்.

எனவே, $m_1 g - T = m_1 a$ ... ... (i)

B-ஐ நோக்குமிடத்து அதன்மீது செயற்படும் விசைகள்

(i) கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை $= m_2 g$

(ii) மேல்நோக்கிச் செயற்படும் கயிற்றின் இழுவிசை $= T$

B மேல்நோக்கி இயங்குவதால், அதன்மீது மேல்நோக்கிச் செயற்படும் விசை $T - m_2 g$.

நியூட்டனின் விதிப்படி $T - m_2 g = m_2 a$ ... ... (ii)

சமன்பாடுகள் (i), (ii)-லிருந்து

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

அல்லது
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad \ldots \quad \ldots \quad 3{\cdot}2$$

மேலும், $\dfrac{\text{சமன் (i)}}{\text{சமன் (ii)}} = \dfrac{m_1 g - T}{T - m_2 g} = \dfrac{m_1}{m_2}$

எனவே, $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ g சார்பிலா அலகுகள்......3.3

கயிற்றின் இழுவிசையை M என்ற நிறையின் எடைக்குச் சமம் எனக் கொள்வோமாயின்,

$$T = Mg$$

$$\therefore \quad Mg = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$\therefore \quad M = \frac{2}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

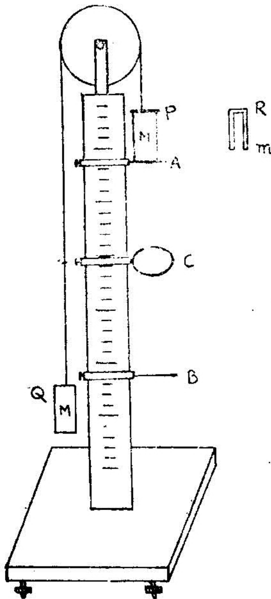
அல்லது $$\frac{2}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

எனவே, கயிற்றின் இழுவிசை m_1, m_2 ஆகியவற்றின் இசையிடை (harmonic mean)க்குச் சமமான நிறையின் எடைக்குச் சமமாகும்.

கயிற்றின் கப்பியுடன் தொடர்பற்ற பகுதிகள் செங்குத்தாக உள்ளனவாதலால், கப்பியின் அச்சின்மீது செயற்படும் விசை,

$$F = 2T$$
$$= 2 \times \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$
$$= 4 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad \dots \quad \dots \quad 3.4$$

மேற்கண்ட தத்துவத்தின் அடிப்படையில் அமைக்கப்பட்ட அட்வுட் எந்திரம் (Atwood's machine) என்னும் கருவி g-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது. அட்வுட் எந்திரம் ஒன்றின் எளிய அமைப்பைப் படம் 3·12-ல் காணலாம். இக் கருவியில் அளவுக் கூறுகள் குறிக்கப்பட்டுச் செங்குத்தாக நிறுத்தப்பட்ட தூண் ஒன்றின் உச்சியில் ஓர் இலேசான உராய்வற்ற கப்பி ஒன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. தூணில் தேவையான இடத்தில் பொருத்திக்கொள்ளக்கூடிய A, B என்ற இரு மேடைகளும் C என்ற ஒரு வளையமும் உள்ளன. A என்ற மேடையைத் திடீரென விழச் செய்யலாம். கப்பியின்மீது ஒரு கயிறு செலுத்தப்பட்டு, அதன் முனைகளில் ஒவ்வொன்றும் M என்ற சமமான நிறையையுடைய P, Q என்ற உருளைகள் இணைக்கப்பட்டு உள்ளன. P என்ற உருளை C என்ற வளையத்தினுள் செல்லக்கூடியதாயுள்ளது. மேலும் ஏறி (rider) என்று அழைக்கப்படும் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு சிறிய எடையும் உள்ளது. இதனை P-ன் மீது வைக்கலாம்; ஆனால், இது வளையத்தின் வழியே செல்லாது.



படம் 3·12

P, Q என்ற உருளைகள் சமமான நிறைகளை உடையன வாதலால், ஏறி P-ன்மீது வைக்கப்படாதபோது, அவை சம நிலையில் இருக்கும்.

இனி, இதனைக்கொண்டு g-ன் மதிப்பை எவ்வாறு கணக்கிடுவது எனக் காண்போம். மேடைகளையும் வளையத்தையும் தக்க இடங்களில் பொருத்தியபின், P-ஐ A என்ற மேடையின்மீது இருத்தி அதன்மீது ஏறியை வைக்கவேண்டும். இப்போது A மேடையைத் திடீரென விழச்செய்வோமாயின், P-ம் ஏறியும் கீழ் நோக்கியும் Q மேல் நோக்கியும் ஒரு முடுக்கத்துடன் இயங்கும். அந்த முடுக்கத்தை 'a' எனக் கொள்வோம். P, வளையத்தை அடைந்தவுடன் அதனின்றும் ஏறி நீக்கப்படுவதால், அதன் பின்னர் P, B என்ற மேடையை அடையும்வரை சீரான திசை வேகத்துடன் இயங்கும். ஏறி நீக்கப்பட்டதிலிருந்து P-யானது வளையத்திலிருந்து B-ஐ அடைவதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைத் துல்லியமாக அளவிடவேண்டும். அதனை t எனக் கொள்வோம். AC, CB ஆகியவற்றையும் துல்லியமாக அளவிட்டுக் கொள்ளவேண்டும். அவை முறையே h_1, h_2 என இருக்கட்டும்.

P, A-லிருந்து வளையத்தை அடையும்வரை அதன் முடுக்கம் (சமன் 3.2-ன்படி) $a = \frac{M+m-M}{M+m+M} \cdot g$

$$= \frac{m}{2M+m} \cdot g$$

P, A-ல் ஓய்விலிருந்து தொடங்குவதால் C-ஐ அடையும் போது அதாவது ஏறி நீக்கப்படுவதற்குச் சற்றுமுன் அதன் திசை வேகம் (சமன் 2.14-ன் படி) $v = \sqrt{2a\, h_1}$

ஏறி நீக்கப்பட்டபின், P, v என்ற சீரான திசை வேகத்துடன் B-ஐ அடைவதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t ஆதலால்,

$$t = \frac{h_2}{v}$$

$$= \frac{h_2}{\sqrt{2ah_1}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{2ah_1} = \frac{h_2}{t}$$

அல்லது $$2ah_1 = \frac{h_2^{\,2}}{t^2}$$

அதாவது $2\frac{mg}{2M+m}.h_1 = \frac{h_2^2}{t^2}$

எனவே, $$g = \frac{2M+m}{2mh_1} \cdot \frac{h_2^2}{t^2}$$

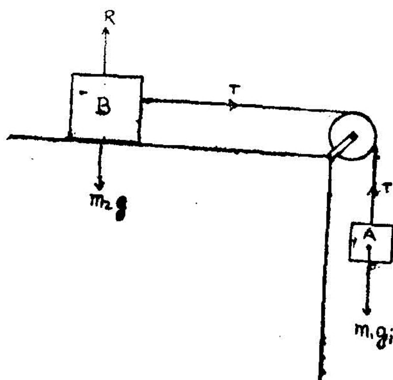
M, m, h_1, h_2, t ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தெரிந்தவை யாதலால், g-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

அட்வுட் எந்திரத்தின் உதவியால் மதிப்பிடப்படும் g-ன் மதிப்பு பின்வரும் காரணங்களால் துல்லியமானதன்று:

(i) மேற்கூறிய கணக்கீடுகளில் கப்பியின் நிறையை மிகவும் குறைந்ததாகக் கருதி அதனை விட்டுவிட்டோம். உண்மையில் அது சரியன்று. கப்பி எவ்வளவு இலேசாக இருந்தாலும் அதனைச் சுற்றுவதற்கு ஒரு விசை தேவை. இப் பிழையைத் தவிர்க்க ஒரு விசை தேவை. இப்;பிழையைத் தவிர்க்க இயக்கத்தில் பங்கு கொண்ட மொத்த நிறையை 2 M+m என்பதற்குப் பதிலாக 2 M+m+I எனக் கொள்ளவேண்டும்; I என்பது கப்பியின் இணைமாற்று நிறை (equivalent mass) எனப்படும்.

(ii) கப்பி சிறிது உராய்வுடன் கூடியதாக இருக்கும். இதனால் ஏற்படும் பிழையை உராய்வு ஏறி (friction rider) என்னும் மற்றொரு ஏறியைப் பயன்படுத்துவதன்மூலம் தவிர்க்கலாம். உராய்வு ஏறியின் நிறை அதனை P-ல் ஏற்றி நிறைகளை இயக்கினால் அவை சீரான திசை வேகத்துடன் செல்லுமாறு சரி செய்யப் படுகிறது.

m_1, m_2 என்ற நிறையைக் கொண்ட A, B என்ற இரு



படம் 3·13

பொருள்கள் ஓர் இலேசான, விரிவுபடாத கயிற்றினால் இணைக்கப்

பட்டுள்ளன. B ஒரு வழவழப்பான கிடைமட்ட மேசைமேல் வைக்கப்பட்டுக் கயிறு மேசையின் விளிம்பிலுள்ள ஓர் இலேசான வழவழப்பான கப்பியின்மீது செலுத்தப்படுகிறது. A, தடங்கலின்றித் தொங்கிக்கொண்டிருக்கிறது. பொருள்களின் முடுக்கத்தையும் கயிற்றின் இழுவிசையையும் பின்வருமாறு காணலாம் :

பொருள்களுள் B மேசைமீதும் A கீழ் நோக்கியும் நகரும். அவற்றின் முடுக்கம் a எனக் கொள்வோம். கயிற்றின் இழுவிசையை T எனக் கொள்வோம்.

A-ன் இயக்கத்தை நோக்குமிடத்து அதன்மீது செயற்படும் விசைகளாவன : (i) கீழ் நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை $=m_1g$ (ii) மேல் நோக்கிச் செயற்படும் கயிற்றின் இழுவிசை $=T$.

A கீழ் நோக்கி நகர்வதால் நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$m_1g-T=m_1a \text{...........(i)}$$

B-ன் இயக்கத்தை நோக்குவோமாயின், அது வழவழப்பான கிடைத்தளத்தின்மீது உள்ளது; அதன் எடை (m_2g) தளம் செயற்படுத்தும் எதிர் விசை (R) யால் சரியீடு செய்யப்படுகிறது; எனவே, அதில் முடுக்கத்தை விளைவிக்கக்கூடிய தொகுபயன் விசை கயிற்றின் இழுவிசையாகும்.

எனவே, $$T=m_2a \quad \text{...........(ii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii)-லிருந்து

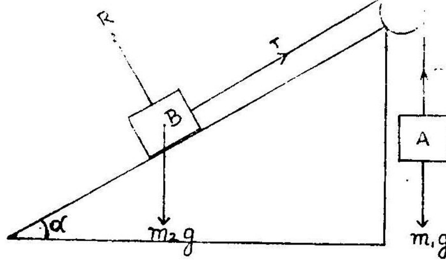
$$a=\frac{m_1 g}{m_1+m_2} \quad \text{.................3.5}$$

a ன் இம் மதிப்பைச் சமன் (ii)-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$T=\frac{m_1 m_2}{m_1+m} \cdot g$$ சார்பிலா அலகுகள்..............3·6

m_1, m_2 என்ற நிறையைக்கொண்ட A, B என்ற இரு பொருள்கள் இலேசான விரிவுபடாத கயிறு ஒன்றினால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. B, கிடைத்தளத்துடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கும் வழவழப்பான சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்டுக் கயிறு, தளத்தின் உச்சியிலுள்ள வழவழப்பான கப்பி ஒன்றின்மீது செலுத்தப்படுகிறது; A தடங்கலின்றித் தொங்கிக் கொண்டிருக் கிறது. பொருள்களின் முடுக்கத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும் கணக்கிடுக.

பொருள்களுள் B, தளத்தில் மேல் நோக்கியும் A, கீழ் நோக்கியும் நகரும். அவற்றின் முடுக்கம் a எனக் கொள்வோம்.



படம் 3·14

கயிற்றின் இழு விசையை T எனக் கொள்வோம். A-ன் இயக்கத்தைக் கருதுவோமாயின், அதில் முடுக்கத்தை விளைவிக்கும் தொகுபயன் விசை $= m_1 g - T$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி $m_1 g - T = m_1 a$.......(i) B-யின் இயக்கத்தை எடுத்துக்கொள்வோமாயின், அதன்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) தளத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையில்,

(a) கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் $m_2 g$-ன் ஆக்கக் கூறு $= m_2 g \cos\alpha$

(b) மேல்நோக்கிச் செயற்படும் தளத்தின் எதிர்விசை $= R$

(ii) தளத்திற்கு இணையாக,

(a) கீழ் நோக்கிச் செயற்படும் $m_2 g$-ன் ஆக்கக் கூறு $= m_2 g \sin\alpha$

(b) மேல் நோக்கிச் செயற்படும் கயிற்றின் இழுவிசை $= T$

$m_2 g \cos\alpha$, R ஆகியவை ஒன்றையொன்று சரியீடுசெய்து கொள்ளுமாதலால் B-ல் முடுக்கத்தை விளைவிக்கக்கூடிய தொகு பயன் விசை $T - m_2 g \sin\alpha$ ஆகும்.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$T - m_2 g \sin\alpha = m_2 a$........................(ii)

சமன்பாடுகள் (i), (ii)-லிருந்து

$$a=\frac{(m_1-m_2\sin\alpha)}{m_1+m_2}\cdot g \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 3{\cdot}7$$

மேலும், சமன் (i) லிருந்து

$$T=m_1(g-a)$$

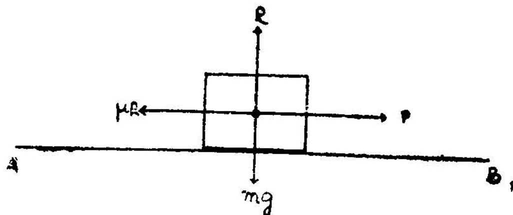
$$=m_1 g\left(1-\frac{m_1-m_2\sin\alpha}{m_1+m_2}\right)$$

எனவே,

$$T=\frac{m_1 m_2(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2}\cdot g \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 3{\cdot}8$$

வழவழப்பற்ற தளங்களில் இயக்கம்

வழவழப்பற்ற கிடைத்தளத்தில் இயக்கம் : m என்ற நிறையை யுடைய ஒரு பொருள் AB என்ற வழவழப்பற்ற கிடைத்தளத்தின்



படம் 3·15

மீது வைக்கப்பட்டு, அதன்மீது P என்ற மாருத கிடைத்தள விசை செயற்படுத்தப்படுகிறது. உராய்வு எண் μ எனில் பொருளின் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 3·15-ல் AB என்பது கிடைத்தளத்தைக் குறிக்கிறது. தளத்தின் குத்தெதிர் விசை R எனவும் பொருளின் இயக்கத்தைத் தடைசெய்யும் உராய்வு விசை F எனவும் இருக்கட்டும்.

உராய்வு எண்ணின் வரையறைப்படி $\mu=\frac{F}{R}$

$$\therefore \quad F=\mu R$$

R, mg-ஐச் சரியீடுசெய்வதால் AB-க்கு இணையாகச் செயற் படும் தொகுபயன் விசை $P-\mu R$ ஆகும்.

P-ன் திசையில் பொருளின் முடுக்கம் a என்ருல்

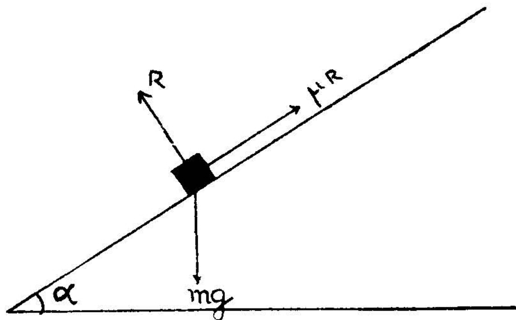
நியூட்டனின் விதிப்படி, $P-\mu R=ma$

அல்லது

$$a=\frac{P-\mu R}{m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 3{\cdot}9$$

வழவழப்பற்ற சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கிய இயக்கம்

m என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருள் வழவழப்பற்ற சாய் தளத்தின்மீது, கீழ்நோக்கி நகருவதாகக் கொள்வோம். அதன்



படம் 3·16

முடுக்கத்தைப் பின்வருமாறு மதிப்பிடலாம்: தளம் கிடைத் தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் α எனவும் உராய்வு எண் μ எனவும் கொள்வோம்.

பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன:

(i) செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயற்படும்
பொருளின் எடை $= mg$

(ii) தளத்திற்கு நேர்குத்தான திசையில் செயற்படும்
குத்தெதிர் விசை $= R$

(iii) தளத்திற்கு இணையாக மேல் நோக்கிச்
செயற்படும் உராய்வு விசை $= \mu R$

mg-ஐத் தளத்திற்கு இணையாகவும் நேர்குத்தாகவும் முறையே $mg \sin \alpha$, $mg \cos \alpha$ என்ற ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிப்போமாயின், பொருள் தளத்திற்கு நேர்குத்தாக இயங்குவதில்லையாதலால்,

$$R = mg \cos \alpha$$

தளத்திற்கு இணையாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுபயன் விசை

$$= mg \sin \alpha - \mu R$$
$$= mg \sin \alpha - \mu\, mg \cos \alpha$$
$$= mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

பொருளின் முடுக்கம் 'a' என்றால், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, $mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = ma$

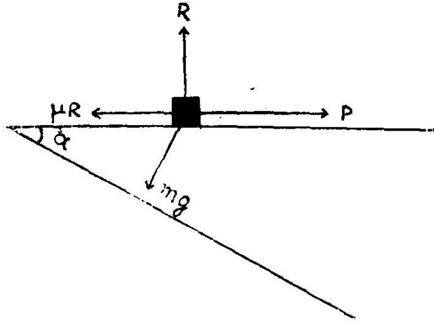
$\therefore \qquad a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\, g$ ......3·10

சாய்தளம் வழவழப்பாக இருக்குமாயின், $\mu = 0$

எனவே $\qquad a = g \sin\alpha.$

வழவழப்பற்ற சாய்தளத்தில் மேல் நோக்கிய இயக்கம்

கிடைத்தளத்துடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கும் சாய் தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்ட m என்ற நிறையையுடைய



படம் 3·17

பொருளின்மீது, P என்ற மாறாத விசை ஒன்று தளத்திற்கு இணையாகச் செயற்பட்டு அதனை மேல்நோக்கி நகர்த்துவதாகக் கொள்வோம். உராய்வு எண் μ எனவும் குத்தெதிர் விசை R எனவும் இருக்கட்டும்.

பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை $= mg$

(ii) தளத்திற்கு நேர்குத்துத்திசையில் செயற்படும் எதிர் விசை $= R$

(iii) தளத்திற்கு இணையாக

(a) மேல் நோக்கிச் செயற்படும் விசை $= P$

(b) கீழ் நோக்கிச் செயற்படும் எதிர்விசை $= \mu R.$

mg-ஐத் தளத்திற்கு இணையாகவும், நேர்குத்தாகவும் முறையே mg sin α, mg cos α என்ற ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிப்போமாயின், தளத்திற்கு நேர்குத்தான திசையில் பொருள் இயங்குவதில்லையாகையால் $R = mg \cos \alpha$

தளத்திற்கு இணையாக மேல்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுபயன் விசை $= P - \mu - mg \sin\alpha$

பொருளின் முடுக்கம் a என்றால், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, $P - \mu R - mg \sin \alpha = ma$

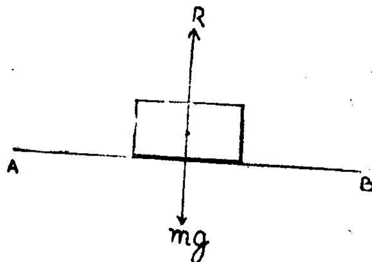
R-ன் மதிப்பைப் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$P - \mu\, mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = ma$$

எனவே, $$a = \frac{P - \mu\, mg \cos \alpha - mg \sin \alpha}{m} \quad \ldots 3{\cdot}11$$

P என்ற விசை கீழ்நோக்கிச் செயற்படுமாயின், பொருளின் முடுக்கம், $$a = \frac{P - \mu\, mg \cos \alpha + mg \sin \alpha}{m} \quad \ldots 3{\cdot}12$$

மாறுத முடுக்கத்துடன் செங்குத்தாக இயங்கும் தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பொருளின்மீது தளம் செயற்படுத்தும் எதிர் விசை :



படம் 3·18

AB என்ற தளத்தின் மீது m என்ற நிறையையுடைய பொருள் வைக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) கீழ் நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை $= mg$

(ii) தளம் மேல் நோக்கிச் செயற்படுத்தும் எதிர் விசை $= R$

(a) தளம் a என்ற மாறுத முடுக்கத்துடன் மேல் நோக்கிச் செல்வதாகக் கொள்வோம் :

பொருளின்மீது மேல்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுபயன் விசை
$R - mg = m.a$

எனவே, $R = m(a+g)$ ...3·13

(b) தளம் a என்ற மாருத முடுக்கத்துடன் கீழ்நோக்கி இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளின்மீது கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுபயன் விசை

$$mg - R = ma$$

$$R = m(g-a) \quad ...3·14$$

சமன்பாடுகள் 3·13, 3·14-லிருந்து தளம் பொருளின்மீது செயற்படுத்தும் எதிர்விசையின் மதிப்பு, தளம் கீழ்நோக்கி இயங்கும்போது உள்ளதைவிட, அதே முடுக்கத்துடன் மேல்நோக்கி இயங்கும்போது அதிகமாக உள்ளது என்பது தெளிவாகிறது.

(c) தளம் ஈர்ப்பு முடுக்கத்திற்குச் சமமான மாரு முடுக்கத்துடன் கீழ் நோக்கி இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

சமன்பாடு 3·14-லிருந்து $R = m(g-g) = 0$ எனவே, இப்பொழுது தளம் பொருளின்மீது எந்தவித விசையையும் செயற்படுத்துவதில்லை.

(d) தளம் சீரான திசை வேகத்துடன் மேல்நோக்கியோ அல்லது கீழ்நோக்கியோ இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

இங்கு $a = 0$
எனவே, $R = mg$

தளம் பொருளின் எடைக்குச் சமமான எதிர்விசையைச் செயற்படுத்தும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3. ஒவ்வொன்றும் 3 பவு. நிறையையுடைய இரு தட்டுகள் ஓர் உராய்வற்ற கப்பியின்மீது செலுத்தப்பட்ட கயிற்றின் முனைகளில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. 12 பவு. நிறையை அவற்றிற்கிடையே எவ் வகையில் பிரித்தால், அவற்றுள் அதிக நிறையைக்கொண்ட தட்டு ஓய்விலிருந்து தொடங்கிய 5 விநாடிகளில் 50 அடி தொலைவைக் கடக்கும்.

தட்டு பெறும் முடுக்கம்

தொடக்கத்திசை வேகம் $u = 0$

எடுத்துக்கொண்ட நேரம் $t = 5$ விநாடிகள்

கடந்த தொலைவு $s = 50$ அடி

முடுக்கம் (சமன் 2·13 ன் படி) $a = \frac{2s}{t^2}$

$= \frac{100}{25}$ அடி/வி²

$= 4$ அடி/வி²

இயக்கத்தில் பங்குபெறும் நிறைகள் (தட்டுகளின் நிறையையும் சேர்த்து) m_1, m_2 எனக்கொள்வோம். $(m_1 > m_2)$.

எனவே, சமன் 3·2-ன் படி முடுக்கம் $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.g$

$\therefore \quad 4 = \frac{m_1 - m_2}{18} \times 32$

அல்லது $m_1 - m_2 = \frac{18}{8}$ பவு.

$\therefore \quad m_1 - m_2 = \frac{18}{8}$

$m_1 + m_2 = 18$

$2m_1 = \frac{18}{8} + 18$

$\therefore \quad m_1 = 10\frac{1}{8}$ பவு.

$m_2 = 7\frac{7}{8}$ பவு.

m_1, m_2 ஆகிய நிறைகளில் தட்டுகளின் நிறையும் சேர்ந்துள்ளதால் முறையே தட்டுகளில் வைக்கப்பட்டிருந்த நிறைகள் $7\frac{1}{8}$ பவு, $4\frac{7}{8}$ பவு.

மாதிரிக் கணக்கு 4. 9 அவு. நிறையையுடைய ஒரு பொருள் மற்றோர் இலேசான பொருளை இலேசான உராய்வற்ற கப்பிவழியே செல்லும் கயிற்றின்மூலம் இழுக்கிறது. இருபொருள்களும் 5 விநாடிகள் இயங்கியபின், கயிறு வெட்டப்பட்டு, இலேசான பொருள் $6\frac{1}{4}$ அடி உயரம் செல்கிறதென்றால், அதன் நிறையைக் கணக்கிடுக.

ஒரு பொருளின் நிறையை m_1 எனவும் மற்றொரு பொருளின் நிறையை m_2 $(= m_1 - m)$ எனவும் கொள்வோம்.

$$m_1 = 9 \text{ அவு.} = \frac{9}{16} \text{பவு.}$$

$$m_2 = m_1 - m = \left(\frac{9}{16} - m\right) \text{பவு.}$$

பொருள்கள் பெறும் முடுக்கம் a எனில், சமன் 3·2 ன் படி

$$a = \frac{m}{(\frac{9}{8} - m)} \times 32 \text{ அடி/வி}^2$$

பொருள்கள் ஓய்விலிருந்து தொடங்குவதால், 5 விநாடிகளின் இறுதியில் இலேசான பொருளின் மேல்நோக்கிய திசைவேகம் சமன்

2·12-ன் படி $v = \frac{m}{(\frac{9}{8}-m)} \times 32 \times 5$ அடி/வி.

எனவே, கயிறு வெட்டப்படுமுன் பொருளின் திசைவேகம்

$$v = \frac{m}{(\frac{9}{8}-m)} \times 32 \times 5 \text{ அடி/வி.}$$

இத் திசைவேகத்துடன் தொடங்கும் இலேசான பொருள் $6\frac{1}{4}$ அடி தொலைவு மேல்நோக்கிச் செல்கிறது. இந்த இயக்கத்தின் போது அதன் முடுக்கம்,

$$= -g = -32'/\text{வி}^2; \; u = \frac{m}{\frac{9}{8}-m} \times 32 \times 5 \text{ அடி/வி. } v = 0.$$

எனவே, சமன் 2·14-ன் படி

$$0 = u^2 - 2 \times 32 \times \frac{25}{4}$$

அல்லது $u = 20$ அடி/வி.

$$\therefore \quad \frac{m}{\frac{8}{9} - m} \times 5 \times 32 = 20$$

அல்லது $160\,m = 20 \times \frac{9}{8} - 20m$

அல்லது $180\,m = 20 \times \frac{9}{8}$

$$\therefore \quad m = \frac{20 \times 9}{180 \times 8} = \frac{1}{8} \text{ பவு : } 2 \text{ அவு.}$$

எனவே, இலேசான பொருளின் நிறை $= m_1 - m$

$= (9-2)$ அவு.

$= 7$ அவு.

பயிற்சி III

1. 15 பவு. நிறையையுடைய ஒரு பொருள், 15 பவு. எடை விசை ஒன்றின் செயற்பாட்டால், ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு வழவழப்பான மேசையின்மீது ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்குகிறது. பொருள் 21 அடி தொலைவு சென்றபின் அவ் விசை செயற்படாது 12 அவு.

எடையுள்ள மற்ெறாரு விசை எதிர்த்திசையில் செயற்படுகிறது. பொருள் ஓய்வுபெறுமுன் அது கடந்த மொத்த தொலைவைக் கணக்கிடுக. [357 அடி]

2. மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு காரை அதன் பிரேக்குகளின் உதவியால், 20 கெஜ தொலைவில் நிறுத்தலாம். காரின் இயக்கத்திற்கு எதிராகச் செயற்படும் தடை ஏறத்தாழக் காரின் எடையில் பாதி எனக் காட்டுக.

3. ஒரு பொருள் 2 விநாடிகளில் 64 அடி தொலைவு தானே விழக்கூடிய ஓர் இடத்தில் குறிப்பிட்ட நிறையின் எடை 15 அலகுகள் என்றால் 3 விநாடிகளில் 176 அடி தொலைவு தானே விழக்கூடிய ஓர் இடத்தில் அதன் எடையைக் கணக்கிடுக. [18·13 அலகுகள்]

4. உராய்வற்ற, வழவழப்பான கப்பி ஒன்றின்மீது செல்லும் கயிற்றின் ஒவ்வொரு முனையிலும் ஒரு கொக்கி இணைக்கப் பட்டுள்ளது. ஒரு கொக்கியிலிருந்து 3 பவு. நிறையுள்ள ஒரு பந்தும் மற்றொன்றிலிருந்து எடை தெரியாத ஒரு பொருளும் தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. பந்து 2 அடி/வி^{2} என்ற முடுக்கத்துடன் மேல் நோக்கி இயங்குமாயின், இரண்டாவது பொருளின் நிறை, கயிற்றின் இழுவிசை, ஒவ்வொரு கொக்கிக்கும் அது தாங்கும் பொருளுக்கும் இடையேயுள்ள விசை ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

[$3\frac{18}{30}$ பவு., 110·3 பவுண்டல்கள், 103 பவுண்டல்கள், 132 பவுண்டல்கள்]

5. 45 பவு நிறையைச் சற்றே தாங்கக்கூடிய ஒரு கயிற்றின் உதவியால், 4 பவு. நிறை ஒன்று தூக்கப்படுகிறது. நிறை தூக்கப் படும்போது பெறக்கூடிய பெரும முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. [4 அடி/வி^{2}]

6. 250 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில்வண்டி நீராவியின் உதவியின்றி 200 க்கு ஒரு சரிவில் சீரானவேகம் ஒன்றுடன் கீழ் நோக்கி இயங்குகிறது. சரிவின் அடியை அடைந்தபிறகு, மட்ட மான நிலத்தில 800 கெஜம் தூரம் செல்லுகிறது. மட்டமான நிலத்தில் அதன்மீது செயற்படும் தடை, சரிவில் செயற்படும் தடைக் குச் சமமாயின் வண்டியின் தொடக்க வேகத்தை மணிக்கு எத்தனை மைல் எனக் கணக்கிடுக. $\left[\frac{120\sqrt{3}}{11}\right.$ மைல்/மணி$\left.\right]$

7. மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஓர் இரயில்வண்டி 150க்கு 1 சரிவின் உச்சியை அடைகிறது. சரிவில் கீழ்நோக்கி 2 மைல் தொலைவைக் கடந்தபின் மட்டமான நிலத்தை அடைகிறது. நீராவியின் உதவியின்றி மட்டமான நிலத்தில் ஓய்வு பெறுமுன் அது செல்லக்கூடிய தொலைவைக் கணக்கிடுக. தண்டவாளங்களினுல் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 10 பவு. எடை.

[2·27 மைல்]

8. ஒவ்வொன்றும் 3 பவுண்டுள்ள இரு நிறைகள் ஒரு வழவழப்பான முளையின்மீது தொங்கும் ஒரு கயிற்றின் முனைகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் ஒன்றின்மீது 3 பவு. அளவுள்ள மூன்ருவது நிறையொன்றை வைத்தால், முளையின்மீது செயற்படும் விசையில் ஏற்படும் அதிகரிப்பு எவ்வளவு?

9. 30° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் சாய்தளம் ஒன்றின் உச்சியிலுள்ள ஒரு கப்பியின்மீது போடப்பட்ட கயிறு ஒன்றின் முனையில் 5 பவு எடை ஒன்று கட்டப்பட்டுச் செங்குத்தாகத் தொங்குகிறது. அது 9 பவு. அளவுள்ள மற்ருெரு எடையைத் தளத்தின்மீது மேல்நோக்கி இழுக்கிறது. எடைகள் பெற்ற முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. [g = 32′/வி²].

4. வேலை, திறன், ஆற்றல்

(Work, Power and Energy)

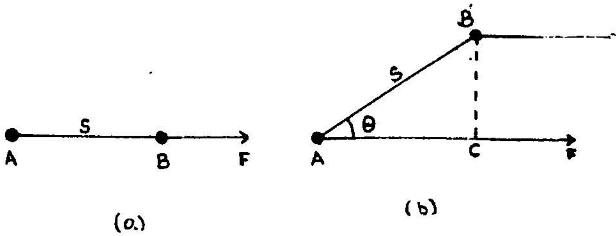
வேலை :

ஒரு பொருளின்மீது ஒரு விசை செயற்படும்போது, விசைச் செயற்படுபுள்ளி நகருமாயின், வேலை செய்யப்படுகிறது எனக் கூறப்படும்.

விசையின் திசையில் பொருள் நகர்ந்தால் விசை வேலையைச் செய்கிறது என்றும், எதிர்த்திசையில் பொருள் நகர்ந்தால் விசையை எதிர்த்து வேலைசெய்யப்படுகிறது என்றும் கூறுகிறோம்.

இரு வகையிலும் வேலையின் மதிப்பை விசை, விசைச் செயற்படு புள்ளி விசையின் திசையில் நகரும் தூரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனால் அளவிடுகிறோம்.

ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் F என்ற ஒரு விசையின்



படம் 4·1

செயற்படு புள்ளி (A) விசையின் திசையில் B என்ற புள்ளிக்கு நகருமாயின் [படம் 4·1 a] விசை செய்த

$$\text{வேலை } (W) = F \times AB$$

AB = S என்ருல்.

$$W = FS$$

விசைச் செயற்படு புள்ளி விசையின் திசையுடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் AB = S என்ற இடப்பெயர்ச்சி யைப் பெறுமாயின் [படம் 4·1b) விசை செய்த,

வேலை = F × விசையில் திசையில் S-ன் ஆக்கக்கூறு

அதாவது, $W = F \times S \cos \theta$.

விசைச் செயற்படுபுள்ளி விசையின் திசைக்கு நேர்குத்தான திசையில் செயற்படுமாயின், $\theta = 90°$ எனவே, விசையினுல் செய்யப் பட்ட வேலை,

$$W = F \cos 90 = 0$$

காட்டாகக் கிடைத் தளத்தில் இயங்கும் பொருளின்மீது புவியீர்ப்பு விசையால் அதாவது, பொருளின் எடையை எதிர்த்துச் செய்யப்படும் வேலை சுழியாகும்.

ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் விசை அளவில் மாறுபடு மாயின், செய்யப்பட்ட வேலையை நுண்கணித முறையில் கணக்கிட லாம்.

விசையின் அளவு மாருமலிருக்கிறது என்று கருதப்படக்கூடிய மிகச்சிறிய இடப்பெயர்ச்சி (ds) யில் செய்யப்படும் வேலை,

$$dw = F \times ds.$$

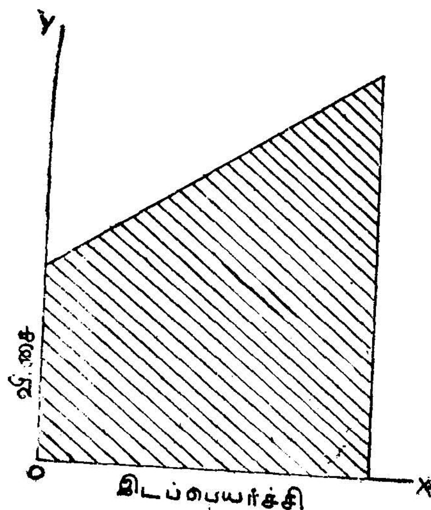
எனவே, விசையின் திசையில் இடப்பெயர்ச்சியின் தொடக்க, இறுதி மதிப்புகளிடையே (முறையே S_1, S_2) செய்யப்படும்

$$\text{மொத்த வேலை } W = \int_{S_1}^{S_2} dw$$

$$\therefore \quad W = \int_{S_1}^{S_2} F \times ds$$

மாறுபடும் விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவை வரைபட முறையிலும் பெறலாம். இடப்பெயர்ச்சிகளை X அச்சிலும் வெவ்வேறு விசைகளை Y அச்சிலும் குறித்து ஒரு வரைபடம் வரைந்தால் வரை கோடு, X அச்சு, விசையின் தொடக்க இறுதி

அளவுகளைக் குறிக்கும் குத்தாயங்கள் (ordinates) ஆகியவற்றிற்



படம் 4·2

குட்பட்ட பரப்பளவு அந்த இடப்பெயர்ச்சிகளுக்கிடையே செய்யப் பட்ட வேலையின் அளவைக் குறிக்கும் [படம் 4·2].

வேலையின் அலகுகள் : ஒருமை விசையொன்றின் செயற்படு புள்ளி விசையின் திசையில் ஓர் அலகு இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறு மாயின் ஓர் அலகு வேலை செய்யப்பெறும்.

மெட்ரிக் முறையில் விசையின் சார்பிலா அலகு எர்க் (erg) எனப்படும். ஓர் எர்க் என்பது ஒரு டைன் விசை யொன்றின் செயற்படு புள்ளி ஒரு செ.மீ. தொலைவு நகரும்போது செய்யப்பெறும் வேலையாகும். பிரிட்டன் முறையில் வேலை சார்பிலா அலகு அடி-பவுண்டல் (foot-poundal) ஆகும். ஓர் அடி-பவுண்டல் என்பது ஒரு பவுண்டல் விசை யொன்றின் செயற்படுபுள்ளி ஓர் அடி தொலைவு நகரும்போது, செய்யப்பெறும் வேலையாகும்.

மெட்ரிக் முறையில் வேலையின் புவியீர்ப்புச் சார்ந்த அலகு (gravitational unit) சென்டிமீட்டர்-கிராம் (centimetre-gram) எனப்படும்; பிரிட்டன் முறையில் அடி-பவுண்டு (foot-pound) எனப்படும் ஒரு சென்டிமீட்டர்-கிராம் என்பது ஒரு கிராம் எடை விசையின் செயற்படு புள்ளி ஒரு செ.மீ. தொலைவு நகரும்போது

செய்யப்பெறும் வேலையாகும். ஓர் அடி-பவுண்டு என்பது ஒரு பவுண்டு எடை விசையின் செயற்படுபுள்ளி ஓர் அடி தொலைவு நகரும்போது செய்யப்பெறும் வேலையாகும்.

1 செ.மீ.– கி. = g எர்குகள்

1 அடி—பவு = g அடி—பவுண்டல்கள்.

மேற்கூறப்பட்ட அலகுகளின் அளவுகள் நடைமுறைக்கு மிகச் சிறியவனவாயிருப்பதால், நடைமுறை அலகு என்னும் மற்றொரு வகை அலகை ஏற்படுத்தியுள்ளனர். மெட்ரிக் முறையில் நடைமுறை ஜூல் (Joule) எனப்படும்.

1 ஜூல் = 10^7 எர்குகள்.

மீள் கம்பியில் (elastic string) இழுவிசை : ஒரு முனை கெட்டியாகப் பொருத்தப்பட்ட மீள் கம்பி ஒன்று இழுக்கப்படும்போது அதில் ஏற்படும் இழுவிசை கம்பியின் நீள அதிகரிப்புக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது எனச் சோதனைமூலம் அறியப்படுகிறது. அதாவது l என்ற இயல்பான நீளத்தையுடைய ஒரு கம்பியில் T என்ற ஒரு இழுவிசை செயற்பட்டு அதன் நீளத்தை l'க்கு மாற்றினால்,

$$T = \frac{E}{l}(l' - l)$$

E என்பது ஒரு மாறிலி. அதன் மதிப்பு கம்பியின் மூலப்பொருள், தடிப்பு ஆகியவற்றைப் பொறுத்துள்ளது. அது கம்பியின் மீட்சிக் குணகம் (modulus of elasticity) என அழைக்கப்படுகிறது.

ஓரலகு குறுக்குப் பரப்பளவுகொண்ட கம்பிக்கு E-ன் மதிப்பு அக் கம்பியின் மூலப்பொருளின் யங் குணகம் (Young's modulus) எனப் பெறும்.

ஒரு மீட்சியுறு கம்பியை இழுக்கும்போது செய்யப்படும் வேலை

l என்ற இயல்பான நீளத்தையும் E என்ற மீட்சிக் குணகத்தையும் கொண்ட ஒரு கம்பியைக் கருதுவோம். கம்பியின் நீளம் x அலகு அதிகரிக்கப்படும்போது, அதில் ஏற்படும் இழுவிசை,

$$T = \frac{E}{l}x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4{\cdot}1$$

கம்பியின் நீளத்தை மேலும் dx அலகுகள் அதிகமாக்குவதாகக் கொள்வோம். (dx முழுவதும் இழுவிசையின் மதிப்பு ஒரே அளவாய் இருக்கிறது எனக் கருதுமளவிற்கு dx-ன் மதிப்பு இருக்கிறது).

இவ் வகையில் செய்யப்பட்ட வேலை $= T.dx.$

$$= \frac{E}{l} xdx$$

எனவே, கம்பியின் நீட்சியை (extension) x_1-லிருந்து x_2-க்கு அதிகமாக்கும்போது செய்யப்படும் வேலை $= \int_{x_1}^{x_2} \frac{E}{l} xdx$

$$= \frac{E}{l} \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}$$

$$= \frac{E}{2l}(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

இனி $\frac{Ex_2}{l}$, $\frac{Ex_1}{l}$ என்பவை நீட்சி முறையே x_2, x_1 ஆக இருக்கும்போது உள்ள இழுவிசைகளாகும். அதாவது முறையே இறுதி, தொடக்க இழுவிசைகள் ஆகும். எனவே, $\frac{E}{2l}$ $(x_2 + x_1)$ என்பது தொடக்க, இறுதி இழுவிசைகளின் சராசரியாகும். மேலும், $x_2 - x_1$ என்பது கம்பியின் நீட்சி.

எனவே, ஒரு கம்பியை இழுக்கும்போது செய்யப்படும் வேலையானது, கம்பியின் தொடக்க, இறுதி இழுவிசைகளின் சரா , கம்பியின் நீட்சி ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாகும்.

திறன்

நேரத்தைப் பொறுத்து வேலை செய்யப்படும் வீதம், திறன் எனப்படும்.

ஒரு கருவி t வினாடிகள் காலத்தில் W அலகு வேலையைச் செய்யுமாயின், அதன் திறன் $P = \frac{W}{t}$

திறனின் அலகுகள் :

சார்பிலா அலகுகள் :

மெட்ரிக் முறை: = எர்க்/வினாடி

பிரிட்டன் முறை : = அடி-பவுண்டல்/வினாடி

புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகுகள் :

மெட்ரிக் முறை = சென்டிமீட்டர்—கிராம்/வினாடி

பிரிட்டன் முறை = அடி—பவுண்டு/வினாடி

தடைமுறை அலகுகள் = மெட்ரிக் முறையில் திறனின் தடைமுறை

நடைமுறை அலகு வாட் (watt) எனப்படும். ஒரு கருவி வினாடிக்கு ஒரு ஜூல் வீதம் வேலை செய்யுமாயின், அதன் திறன் ஒரு வாட் எனப்பெறும்.

பிரிட்டன் முறையில் திறனின் நடைமுறை அலகு குதிரைத் திறன் (Horse Power) எனப்படும். ஒரு கருவி வினாடிக்கு 550 அடி—பவுண்டுகள் வீதம் வேலைசெய்யுமாயின் அதன் திறன் ஒரு குதிரைத் திறனாகும். குதிரைத் திறனை H. P. எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பது வழக்கம்.

1 குதிரைத் திறன் = 746 வாட்டுகள்

ஆற்றல்

ஒரு பொருளின் ஆற்றல் என்பது வேலையைச் செய்வதற்கான அதன் திறமையாகும்.

ஒரு பொருளின் ஆற்றல் அது செய்யக்கூடிய மொத்த வேலையைக்கொண்டு அளவிடப்படுவதால்,வேலைக்குரிய அலகுகளே ஆற்றலுக்கும் உரியனவாகும்.

ஆற்றலானது எந்திர ஆற்றல், வெப்ப ஆற்றல், ஒளி ஆற்றல், ஒலி ஆற்றல், மின்னாற்றல் எனப் பலவகைப்படும். எனினும், பொறியியலில் எந்திர ஆற்றலைப்பற்றி விரிவாகக் கூறப்படும். ஒரு பொருள் பல காரணங்களால் ஆற்றலைப் பெற்றிருக்கலாம். காட்டாக, ஓர் இயங்கும் பொருள் அந்த இயக்கத்தினால் ஒரு ஆற்றலைப் பெறுகிறது. அத்தகைய ஆற்றல் இயக்காற்றல் (kinetic energy) எனப்படும். அழுத்தப்பட்ட காற்று, சுருக்கப்பட்ட வில் போன்ற பொருள்கள் அவற்றின் இயல்பான நிலையிலிருந்து மாறுபட்டிருப்பதால் ஆற்றலைப் பெற்றுள்ளன. அத்தகைய ஆற்றல் நிலையாற்றல் (potential energy) எனப்படும். இயக்காற்றல், நிலையாற்றல் ஆகியவை எந்திர ஆற்றலின் இரு வகைகளாகும். இனி, இவ் விரு ஆற்றல்களைப்பற்றி விரிவாகக் காண்போம்.

இயக்க ஆற்றல்: ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றத என்பது அதன் இயக்கத்தால் அதுபெறும் ஆற்றலாகும். அது அப் பொருள் ஓய்வு பெறுமுன் செய்யக்கூடிய வேலையாகும்.

v என்னும் திசை வேகத்துடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் செல்லும் m அலகு நிறையுள்ள ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அதன்மீது F என்ற ஒரு விசை அதன் இயக்கத்திற்கு எதிர்த்திசையில்

செயற்பட்டு, அதனை s தொலைவில் நிறுத்தட்டும். பொருளில் ஏற்பட்ட எதிர்முடுக்கம் ‘a’ எனக் கொள்வோம்.

இயக்க ஆற்றல் = பொருள் ஓய்வு பெறுமுன் விசையை எதிர்த்துச்செய்யப்பட்ட வேலை.

$$= F \times S$$

$$= m \times a \times s.$$

பொருளின் தொடக்கத் திசை வேகம் (u) = V

இறுதித் திசை வேகம் (v) = O

இடப்பெயர்ச்சி = S

∴ எதிர்முடுக்கம் $a = \frac{v^2}{2s}$ [சமன் 2·14]

எனவே, இயக்க ஆற்றல் $= m \times \frac{v^2}{2s} \times S$

$= \frac{1}{2} mv^2$ சார்பிலா அலகுகள்

தேற்றம் 4·1 : இயங்கும் பொருள் ஒன்றின் ஓர் அலகு இடப்பெயர்ச்சிக்கு அதன் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல், பொருளின்மீது செயற்படும் விசைக்குச் சமமாகும்.

u என்ற திசை வேகத்துடன் இயங்கும் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அதன்மீது F என்ற ஒரு விசை செயற்பட்டு, திசை வேகத்தை v என மாற்றட்டும். திசை வேக மாறுதலின்போது, பொருள்பெற்ற இடப்பெயர்ச்சி s எனக் கொள்வோம்.

தொடக்க இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mu^2$

இறுதி இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2$

இடப்பெயர்ச்சி $= s$

ஓரலகு இடப்பெயர்ச்சியின்போது இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல்,

$$= \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2}{s}$$

$$= \frac{m(v^2 - u^2)}{2s}$$

சமன்பாடு 2·14-ன் படி $\frac{v^2 - u^2}{2s} = a =$ முடுக்கம்

எனவே, ஓரலகு இடப்பெயர்ச்சிக்கு இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு

$$= ma = F.$$

நிலையாற்றல்: ஒரு பொருளின் நிலையாற்றலானது அதன் நிலையைப்பொறுத்து அது பெறும் ஆற்றலாகும், ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் ஒரு பொருளின் நிலையாற்றல் அப் பொருள் அந் நிலையிலிருந்து தன் இயல்யான நிலைக்குத் திரும்பும்போது அது, செய்யக்கூடிய வேலையாகும்.

நிலமட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலிருக்கும் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அது தானே விழும்பொழுது அது செய்யும் வேலையை அதன்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்புவிசை, அது விழும் உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனால் அறியப்படுகிறது. எனவே, அப் பொருள் அதன் இயல்பான நிலைக்கு அதாவது நிலமட்டத்திற்கு விழும்போது, அது செய்யக்கூடிய வேலை, $= mg \times h$

$= mgh$ சார்பிலா அலகுகள்.

எனவே, நிலமட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலிருக்கும் பொருளின் நிலையாற்றல் $= mgh$ சார்பிலா அலகுகள்.

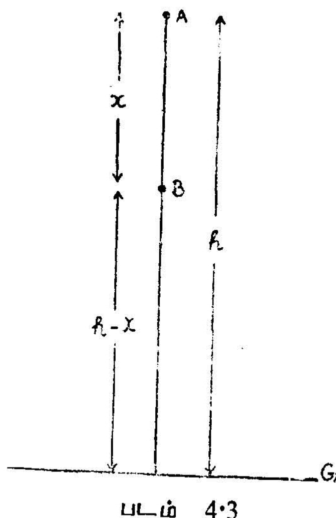
நாம் நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் பலவகை ஆற்றல்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஒருவகை ஆற்றலைப் பயன்படுத்தி மற்றொருவகை ஆற்றலைப் பெறுகிறோம். காட்டாக நீராவி எந்திரத்தில் வெப்ப ஆற்றல் இயக்க ஆற்றலாக மாற்றப்படுகிறது. மின்னாற்றலானது மின் விசிறியில் இயக்க ஆற்றலாகவும் மின் விளக்கின் ஒளி, வெப்ப ஆற்றலாகவும் மாற்றப்படுகின்றன. கடிகாரத்தில் நிலையாற்றல் இயக்க ஆற்றலாக மாற்றப்படுகிறது. ஊசலில் நிலையாற்றல் இயக்க ஆற்றலாகவும் இயக்க ஆற்றல் நிலையாற்றலாகவும் தொடர்ந்து மாறுகிறது. இவ்வாறு, ஒருவகை ஆற்றல் மற்றொருவகை ஆற்றலாக மாறும்பொழுது ஒருவகையில் மறையும் ஆற்றல் மற்றவகைகளில் சேதமின்றி வெளித்தோன்றுகிறது. இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஆற்றல் அழிவின்மை விதி (Law of conservation of energy) என்னும் விதி உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆற்றல் அழிவின்மை விதி: ஆற்றலை ஆக்கவோ அழிக்கவோ முடியாது. ஆற்றல் ஒருவகையில் மறையுமாயின், பிறிதொரு வகையில் சேதமின்றி வெளித்தோன்றும் அல்லது இவ்வண்டத்திலுள்ள மொத்த ஆற்றலின் அளவு மாறுவதது.

ஆற்றல் அழிவின்மை விதியைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் நிறுவலாம்.

(i) செங்குத்தாகத் தானே விழும் ஒரு பொருள்: m நிறை கொண்ட ஒரு பொருள் நில மட்டத்திலிருந்து h என்ற உயரத்திலிருந்து தானே விழுவதாகக் கொள்வோம். அப் பொருள் நில

மட்டத்தை நெருங்க நெருங்க அதன் நிலையாற்றல் குறைந்து இயக்க ஆற்றல் அதிகமாகிறது. அதன் எல்லா நிலைகளிலும் நிலையாற்றல், இயக்க ஆற்றல் ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரே அளவாக இருக்கிறது என்று காட்டலாம்.



படம் 4·3

படம் 4·3-ல் G, நிலமட்டத்தையும் A, h உயரத்தி ப் ஒரு புள்ளியையும்குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

பொருள் A-ல் இருக்கும்போது,

நிலையாற்றல் $= mgh$

இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2 = 0$

$(\because v = 0]$

எனவே, மொத்த ஆற்றல் =

$= mgh + 0 = mgh$

பொருள் G-ஐ அடையும்போது,

நிலையாற்றல் $= mgh = 0 \quad [\because h = 0]$

அதுவே G-ஐ அடையும்போது அதன் திசைவேகம் V எனில் சமன் 2·14-ன் படி $v^2 = 2gh$

எனவே G-ல் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,2gh = mgh$

$\therefore$ G-ல் மொத்த ஆற்றல் $= 0 + mgh = mgh$

அடுத்து A-க்குக் கீழ் x ஆழத்தில் உள்ள B என்ற ஒரு புள்ளியைக் கருதுவோம்.

பொருள் B அடையும் பொழுது,

நிலையாற்றல் $= mg\,(h - x)$

B-ல் அதன் திசைவேகம் v_1 எனில், அது ஓய்விலிருந்து x தொலைவு விழுந்திருப்பதால் சமன்பாடு 2·14-ன்படி.

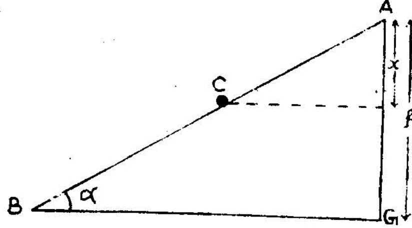
$v_1^2 = 2gx.$

எனவே, B-ல் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\,m2gx = mgx$

$\therefore$ B-ல் மொத்த ஆற்றல் $= mg(h\text{-}x) + mgx = mgh.$

இவ்வாருக A-லிருந்து நிலமட்டத்தை அடையும்வரை அதன் மொத்த ஆற்றலின் அளவு மாருமலிருக்கிறது.

(2a) வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மீது கீழ்நோக்கித் தானே இயங்கும் பொருள் : கிடைத்தளத்திற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியில் ஓய்விலிருந்து கீழ்நோக்கி இயங்கும் ஒரு துகளைக் கருதுவோம்.



படம் 4·4

படம் 4·4-ல் AB சாய்தளத்தையும் BG கிடைத்தளத்தையும் குறிக்கின்றன. சாய்தளத்தின் உயரம் h எனக் கொள்வோம்.

A-ல் நிலையாற்றல் $= mgh$

இயக்க ஆற்றல் $= 0$

மொத்த ஆற்றல் $= mgh + o = mgh$

பொருள் B-ஐ அடையும்போது

நிலையாற்றல் $= 0$

B-ல் அதன் திசை வேகம் v எனக்கொள்வோம். v-ன் மதிப்பு பொருள் ஓய்விலிருந்து தொடங்கிச் சாய்தளத்தின் உயரத்திற்குச் சமமான h தொலைவு விழும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். எனவே, $v^2 = 2gh$

$\therefore$ இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times 2gh = 2gh$

மொத்த ஆற்றல் $= o + mgh = mgh$

அடுத்துத் தளத்தின்மீது A-க்கும் B-க்கும் இடையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (C)யைக் கருதுவோம். A-லிருந்து C-ன் செங்குத்து ஆழம் x என இருக்கட்டும்.

C-ல் நிலையாற்றல் $= mg\,(h - x)$

C-ஐ அடையும்போது பொருளின் திசைவேகம் v_1 எனின்,

$v_1^2 = 2gx$

$\therefore$ C-ல் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv_1^2 = mgx$

மொத்த ஆற்றல் $= mg(h - x) + mgx = mgh.$

இவ்வாருக, பொருள் வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மீது கீழ் நோக்கி இயங்கும்போது, அதன் மொத்த ஆற்றலின் அளவு மாருமல் இருக்கிறது.

(2b) சாய்தளத்தின்மீது கீழ்நோக்கி உருளும் பந்து: கிடைத் தளத்திற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் ஒரு சாய்தளத்தின்மீது ஒரு பந்து A என்ற புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து தொடங்கி, B-ஐ நோக்கி உருளுவதாகக் கொள்வோம். [படம் 4·4] பந்தின் நிறை m எனில்,

A-ல் பந்தின் நிலையாற்றல் $= mgh$

இயக்க ஆற்றல் $= 0$

$\therefore$ மொத்த ஆற்றல் $= mgh+0$

$= mgh$

பந்து B-ஐ அடையும்போது

அதன் நிலையாற்றல் $= 0$

$\therefore$ B-ல் அதன் இயக்க ஆற்றலானது, அப் புள்ளியில் நேர்க்கோட்டுத்திசை வேகம் (v), கோணத்திசைவேகம் (w) ஆகியவற்ருல் அது பெறும் இயக்க ஆற்றல்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

பந்தின் ஆரம் r எனில் $v=rw$; சுழற்சி ஆரம் (radius of gyration) k எனில் அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன் (moment of inertia) $I=mk^2$ எனவே, B-ல் பந்தின் நேர்கோட்டுத்திசை வேகத்தால் அது பெறும்இயக்க ஆற்றல் $=\frac{1}{2}mv^2$. கோணத்திசை வேகத்தால் பெறும் இயக்க ஆற்றல் $=\frac{1}{2}Iw^2 = mk^2\frac{v^2}{r^2}$. எனவே, மொத்த இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)$.

$$\text{ஆனால்,}\quad v^2 = \frac{2gh}{\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)} \quad \text{(பார்க்க சமன் 9·18a)}$$

$$\therefore \text{B-ல் பந்தின் இயக்க ஆற்றல்} = \frac{1}{2}m\frac{2gh}{\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)}\cdot\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)$$

$= mgh$

எனவே, B-ல் மொத்த ஆற்றல் $= 0+mgh$

$= mgh.$

அடுத்து, தளத்தின்மீது A-க்கும் B-க்கும் இடையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி(C)யைக் கருதுவோம். A-யிலிருந்து C-ன் செங்குத்து ஆழம் x என இருக்கட்டும்.

C-ல் நிலையாற்றல் $= mg(h-x)$

C-ஐ அடையும்போது பொருளின் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகம் v_1 எனக் கொள்வோமாயின்,

$$v_1^2 = \frac{2g\,x}{\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)}$$

$\therefore$ C-ல் இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2}mv_1^2\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}m\frac{2gx}{\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)}\cdot\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)$$

$$= mgx.$$

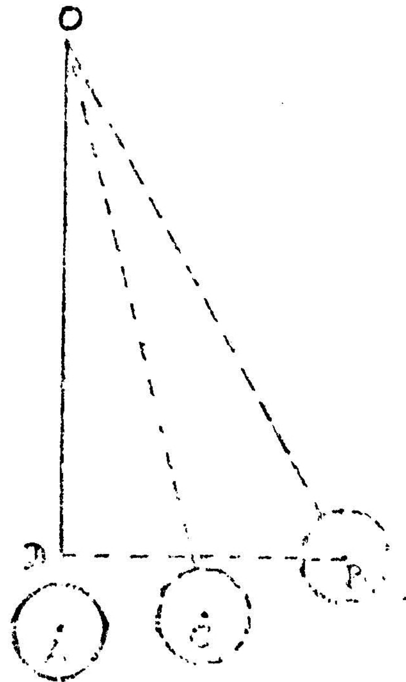
எனவே, C-ல் மொத்த ஆற்றல்

$$= mg(h-x) = mgx$$

$$= mgh.$$

இவ்வாறுக, ஒரு பொருள் ஒரு சாய்தளத்தின்மீது கீழ் நோக்கி நகரும்போதோ அல்லதுஉருளும்போதோ அதன் மொத்த ஆற்றலின் அளவு மாறுமலிருக்கிறது.

3. தனி ஊசலின் இயக்கம்: தனி ஊசல் அலைவுறும் போது நிலையாற்றல் இயக்க ஆற்றலாகவும் இயக்க ஆற்றல் நிலையாற்றலாகவும் தொடர்ந்து மாறுகின்றன. எனவே, தனி ஊசலைக் கொண்டும் ஆற்றல் அழிவின்மை விதியை நிரூபிக்கலாம். படம் 4·4a-ல் OA, தனி ஊசலின் சமநிலையையும் OB ஒரு கோடி நிலையையும் குறிக்கின்றன OA= OB=l தனி ஊசலின் நீளம் எனவும் கோடி நிலையில் ஊசல் செங்குத்து நிலைக்கு



θ கோணத்தில் சாய்ந்து இருப்பதாகவும் கொள்வோம். கோடி நிலையில் அதன் ஆற்றல் முழுதும் நிலையாற்றலாகவும் சமநிலையில் இயக்க ஆற்றலாகவும் மற்றெந்த நிலையிலும் ஒருபகுதி நிலையாற்றலாகவும், எஞ்சிய பகுதி இயக்க ஆற்றலாகவும் இருக்கும். குண்டு A-லிருந்து B-க்குச் செல்லும்போது, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் உயர்த்தப்படும் தொலைவு AD = h, குண்டின் நிறை m எனக் கொள்வோமாயின், ஊசல் சமநிலையிலிருந்து B-க்குச் செல்லும்போது அது பெறும்

நிலையாற்றல் = mgh

B-ல் அதன் இயக்க ஆற்றல் = 0

குண்டு A-ஐ அடையும்போது அது இழக்கும் நிலையாற்றல் = mgh.

ஆனால், A-ல் அதன் ஆற்றல் முழுதும் இயக்க ஆற்றலாகும். A-ல் அதன் திசைவேகம் v எனில் அங்கு இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2$ ஊசல் குண்டு B-ல் ஓய்விலிருந்து கீழ்நோக்கி இயங்குவதால்,

$v^2 = 2gh$ (பார்க்க சமன் 7·17)

$\therefore$ A-ல் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2$
$= \frac{1}{2}m.\ 2gh$
$= mgh.$

அடுத்து, A, B ஆகிய நிலைகளுக்கிடையேயுள் C என்ற ஒரு நிலையைக் கருதுவோம். B-லிருந்து C-ன் செங்குத்து ஆழம் x எனில், ஊசல் குண்டு B-லிருந்து C-க்கு இயங்கும்போது அது இழக்கும் நிலையாற்றல், $= mgx.$

C-ல் அதன் திசைவேகம் v_1 எனில் அங்கு அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv_1^2$

ஆனால், $v_1^2 = 2gx$

$\therefore$ C-ல் குண்டின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\cdot 2gx$
$= mgx.$
= குண்டு இழந்த நிலையாற்றல்.

அதாவது ஊசல் OB நிலையிலிருந்து OA நிலைக்கு இயங்கும்போது, எந்தவொரு புள்ளியிலும் அதன் நிலையாற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு முழுதும் அதன் இயக்க ஆற்றலாக வெளிப்படுகிறது. இவ்வாறாக ஆற்றல் மாற்றத்தின்போது, ஒருவகை ஆற்றல் பிறிதொரு வகையில் சேதமின்றி வெளிப்படுகிறது; அதாவது ஊசலின் மொத்த ஆற்றல் மாறாமல் இருக்கிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 1. ஒரு பம்பு 2 அங். ஆரமுடைய குழாயின் மூலம் 50 அடி உயரத்திற்கு நிமிடத்திற்கு 1500 காலன்கள் வீதம் நீரை ஏற்றுகிறது. பம்பின் குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக. [1 கன அடி நீர் = $6\frac{1}{4}$ காலன்கள்; 1 காலன் நீரின் நிறை = 10 பவு].

பம்பிலிருந்து நீர் வெளிவரும் வேகம் v எனக் கொள்வோம்.

$$\text{ஒரு விநாடியில் வெளிவரும் நீரின் பருமன்} = \frac{22}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} v$$

$$= \frac{11}{126} v \text{ க. அடி}$$

மேலும், ஒரு நிமிடத்திற்குப் பம்பு 1500 காலன்கள் நீரை ஏற்றுவதால், 1 விநாடியில் குழாயிலிருந்து வெளிவரும் நீர் $= \frac{1500 \times 4}{25 \times 60}$

$= 4$ க. அடி

$$\therefore \quad \frac{11}{126} v = 4$$

$$v = 4 \times \frac{126}{11} = \frac{504}{11} \text{ அடி/வி.}$$

$$\text{ஒரு விநாடியில் மேலேற்றப்படும் நீரின் நிறை} = \frac{1500 \times 10}{60}$$

$= 250$ பவுண்டு

எனவே, 50 அடி உயரத்தில் நீரின் நிலையாற்றல் $= mgh$

$= 250 \times 32 \times 50$ அடி-பவுண்டல்கள்

$= 250 \times 50$ அடி-பவு.

$= 12500$ அடி-பவு.

மேலும், நீரானது குழாயின் வழியாக $\frac{504}{11}$ அடி/வி. வேகத்தில் செல்வதால் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$

$= \frac{1}{2} \times 250 \times \frac{504}{11} \times \frac{504}{11}$ அடி-பவுண்டல்கள்

$= 8200$ அடி-பவுண்டுகள்

ஒரு விநாடியில் நீருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட மொத்த ஆற்றல்

$= 12500 + 8200$ அடி-பவுண்டுகள்

$\therefore$ ஒரு விநாடியில் செய்யப்பட்ட வேலை அல்லது

திறன் $= 20700$ அடி-பவுண்டுகள்

அல்லது $= \frac{20700}{550}$ H.P.

$= 37{\cdot}63$ H.P.

எனவே, பம்பின் குதிரைத் திறன் $= 37{\cdot}63$

மாதிரிக் கணக்கு 2: 100 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 224-க்கு 1 சரிவில் மணிக்கு 15 மைல் சீரான வேகத்தில் செல்லுகிறது. உராய்வு, காற்று முதலியவற்ருல் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 9 பவு-எடை என்ருல் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக.

வண்டி சீரான வேகத்தில் செல்வதால் உராய்வு, காற்று முதலிய வற்ருல் ஏற்படும் தடை, சரிவால் ஏற்படும் தடை ஆகியவை எஞ்சின் செயற்படுத்தும் விசைக்குச் சமமாகும்.

உராய்வு, காற்று முதலியற்ருல் ஏற்படும் தடை $= 100 \times 9$ பவு-எடை
$= 900$ பவு எடை.

சரிவால் ஏற்படும் தடை = வண்டியின் எடையின் தளத்திற்கு இணையான கீழ்நோக்கிய ஆக்கக் கூறு

$= 100 \times \frac{1}{224} \times 2240 = 1000$ பவு-எடை

மொத்த தடை = எஞ்சினின் விசை $= 1900$ பவு-எடை

வண்டி ஒரு வினடியில் கடக்கும் தொலைவு = அதன்வேகம்
$= 22$ அடி/வி.

∴ எஞ்சின் ஒரு வினடியில் செய்த வேலை

= திறன் $= 1900 \times 22$ அடி-பவுண்டுகள்/வி.

$= \frac{1900 \times 22}{550}$ H.P.

$= 76$ H.P.

எஞ்சினின் குதிரைத் திறன் $= 76$.

மாதிரிக் கணக்கு 3. 100 டன்கள் நிறையுள்ள இரயில் வண்டி ஒன்றின் எஞ்சின் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 224-க்கு 1 சரிவில் மேல் நோக்கிச் செல்லும்போது, 3 நிமிடங்களில் மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தை எட்டுகிறது. உராய்வினுல் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 8 பவு-எடை எனின், எஞ்சினின் பெரும குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக.

எஞ்சின் செயற்படுத்தக்கூடிய பெரும விசை F பவு. எடை எனக் கொள்வோம். இவ் விசையில் ஒரு பகுதி உராய்வினுல்

ஏற்படும் தடை, சரிவால் ஏற்படும் தடை ஆகியவற்றை எதிர்த்து வேலை செய்யவும் எஞ்சிய பகுதி வண்டிக்கு முடுக்கம் கொடுக்கவும் பயன்படுகிறது.

உராய்வினால் ஏற்படும்தடை

$= 100 \times 8 = 800$ பவு. எடை

சரிவால் ஏற்படும் தடை

= சரிவுக்கு இணையான வண்டியின்

எடையின் ஆக்கக் கூறு

$= 100 \times 2240 \times \frac{1}{224} = 1000$ பவு. எடை

எனவே, மொத்த தடை $= 1800$ பவு. எடை

∴ முடுக்கம் கொடுக்கக் கூடிய விசையின் அளவு

$= (F - 1800)$ பவு. எடை

$$\therefore \quad a = \frac{F-1800}{100 \times 2240} \times 32$$

$$= \frac{F-1800}{100 \times 70} \text{ அடி/வி}^2$$

மேலும், வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 3 நிமிடங்களில் மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தைப் பெறுவதால், சமன் 2·12-ன்படி

$$a = \frac{v-u}{t}$$

$$= \frac{22}{180} \text{ அடி/வி}^2$$

$$\therefore \quad \frac{F-1800}{100 \times 70} = \frac{22}{180}$$

அல்லது $F - 1800 = \frac{22 \times 100 \times 7}{18} = 856$ பவு. எடை

$F = 2656$ பவு. எடை

வண்டி ஒரு வினாடியில் செல்லும் தொலைவு $= 22$ அடி

∴ எஞ்சின் ஒரு வினாடியில் செய்யும் வேலை =

திறன் $= 2656 \times 22$ அடி-பவுண்டுகள்/வி.

$$= \frac{2656 \times 22}{550} = 106{\cdot}24 \text{ H.P.}$$

எஞ்சினின் பெரும குதிரைத் திறன் $= 106{\cdot}24$

மாதிரிக் கணக்கு 4. மணிக்கு 30 மைல் பெரும வேகத்துடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் இரயில் வண்டி ஒன்றிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் 10 டன்கள் நிறையுள்ள 4 பெட்டிகள் கழற்றிவிடப்படுகின்றன. இதன் பயனுய் வண்டியின் பெரும வேகம் மணிக்கு 45 மைலாக உயருகிறது. உராய்வு, காற்று முதலியவற்ருல் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 8பவு. என்ருல் இரயில் வண்டியின் மொத்த நிறையையும் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனையும் கணக்கிடுக.

இரயில் வண்டி பெரும வேகத்துடன் சீராகச் செல்லும்போது காற்று, உராய்வு முதலியவற்ருல் ஏற்படும் தடை எஞ்சின் செயற்படுத்தும் விசைக்குச் சமமாகும்.

இரயில் வண்டியின் நிறை M டன்கள் என இருக்கட்டும். முதலில் இயில் வண்டி மணிக்கு 30 மைல் சீரான வேகத்தில் செல்லும்போது காற்று, உராய்விஞல் ஏற்படும் தடை

$= M \times 8$ பவு. எடை

வண்டி ஒரு விஞடியில் கடந்த தொலைவு $= 44$ அடி.

$\therefore$ எஞ்சினின் திறன் $= \dfrac{M \times 8 \times 44}{550}$ H.P.

$\dfrac{16\ M}{25}$ H.P.

அடுத்து, இரயில் வண்டி மணிக்கு 45 மைல் சீரான வேகத்தில் செல்லும்போது ரயில் வண்டியின் நிறை (M—40 டன்களாகக் குறைவதால் காற்று, உராய்விஞல் ஏற்படும் தடை $= (M-40) \times 8$ பவு. எடை

வண்டி ஒரு விஞடியில் கடக்கும் தொலைவு

$= 66$ அடி

$\therefore$ எஞ்சினின் திறன் $= \dfrac{(M-40) \times 8 \times 66}{550}$ H.P.

$= (M-40)\ \dfrac{24}{25}$ H.P.

எனவே,

$$(M-40)\frac{24}{25} = \frac{16}{25}M$$
$$8M = 40 \times 24$$
$$M = 120 \text{ டன்கள்.}$$

எஞ்சினின் திறன் $= \frac{16M}{25}$ H.P.

$= \frac{16 \times 120}{25}$ H.P.

$= 76{\cdot}8$ H.P.

எனவே ரயில் வண்டியின் நிறை $= 120$ டன்கள்
எஞ்சினின் குதிரைத் திறன் $= 76{\cdot}8$.

மாதிரிக் கணக்கு 5: 288 குதிரைத் திறனுடன் வேலை செய்யும் ஓர் எஞ்சின் 150 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் ரயில் வண்டியைச் சமதளத்தில் இழுக்கிறது. உராய்வினால் அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 12 பவு. எடை. வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 45 மைலாக இருக்கும்போது அதன் முடுக்கம் என்ன? அதே தடையை எதிர்த்து அதே குதிரைத் திறனுடன் 112 க்கு 1 சரிவில் மேல் நோக்கிச் செல்லும்போது வண்டி பெறக்கூடிய சீரான திசை வேகம் என்ன?

வண்டி மணிக்கு 45 மைல் வேகத்தில் செல்லும்போது ஒரு விநாடியில் கடக்கும் தொலைவு $S = 66$ அடி

ஒரு விநாடியில் எஞ்சின் செய்யும் வேலை
$W = 288 \times 550$ அடி. பவுண்டுகள்

∴ எஞ்சின் செயற்படுத்தும் விசை

$= \frac{W}{S} = \frac{288 \times 550}{66}$ பவு. எடை

$= 2400$ பவு. எடை

இரயில் வண்டியின் இயக்கத்திற்கு உள்ள தடை
$= 150 \times 12 = 1800$ பவு. எடை

∴ எஞ்சினின் விசையில் வண்டிக்கு முடுக்கம் கொடுப்பதற்குப் பயன்படும் விசை $F = 2400 - 1800$ பவு. எடை.

$= 600$ பவு. எடை

வண்டியின் நிறை $= 150$ டன்கள்

எனவே முடுக்கம் $a = \frac{F}{M} = \frac{600 \times 32}{150 \times 2240} = \frac{4}{70}$

$= \frac{2}{35}$ அடி/வி^{2}

சரிவில் வண்டி சீரான வேகத்துடன் செல்லுமாகையால் அதன் இயக்கத்திற்குள்ள தடை = எஞ்சின் செயற்படுத்தும் விசை.

உராய்வினால் ஏற்படும் தடை

$= 150 \times 12 = 1800$ பவு. எடை

சரிவினால் ஏற்படும் தடை

$= 150 \times 2240 \times \frac{1}{112} = 3000$ பவு. எடை

மொத்த தடை $= 4800$ பவு. எடை

சரிவில் எஞ்சினின் சீரான திசை வேகம் V எனில்

$$4800 = \frac{\text{எஞ்சின் ஒரு விநாடியில் செய்யும் வேலை}}{V}$$

$$\frac{288 \times 550}{V}$$

$$\therefore \quad V = \frac{288 \times 550}{4800} \text{ அடி/வி.}$$

$$= 33 \text{ அடி/வி.}$$

அல்லது $V = \frac{33 \times 15}{22} = 22 \cdot 5$ மை/மணி.

மணிக்கு 45 மைல் வேகத்தில் முடுக்கம் $= \frac{2}{35}$ அடி/வி^{2}

சரிவில் சீரான திசை வேகம் $= 22 \cdot 5$ மைல்/மணி.

பயிற்சி IV

1. ஓர் எஞ்சின் நிமிடத்திற்கு 6000காலன்கள் வீதம் நீரை 21′ சராசரி உயரத்திற்கு ஏற்றுகிறது. எஞ்சினின் திறனில் வீணாகிவிடுகிறது என்றால், எஞ்சினின் குதிரைத்திறனைக் கணக்கிடுக. [69·4]

2. 100 அடி சராசரி உயரத்தில் உள்ள 20′ × 16′ × 4′ பரிமாணங்களைக்கொண்ட ஒரு தொட்டியை 2 மணி நேரத்தில் நீரால் நிரப்ப ஓர் எஞ்சின் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எஞ்சினின் ஆற்றலில் 80 சதவீதமே நீரை மேலேற்றப் பயன்படுகிறது என்பதைக் கருத்திற்கொண்டு, எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக. (1 கன அடி நீரின் நிறை 62·5 பவு.) [253]

3. 2 குதிரைத்திறனுள்ள ஒரு பம்பு 30 அடி சராசரி உயரத்திற்கு நீரை ஏற்றுகிறது. எஞ்சினின் பயனுறுதிறன் 60% என்றால், 1 மணி நேரத்தில் எஞ்சின் மேலேற்றும் நீரின் பருமனைக் கணக்கிடுக. (1 காலன் நீரின் நிறை 10 பவு.) [7920 காலன்கள்]

4. ஓர் எந்திரத் துப்பாக்கி 1800 அடி/வி. திசை வேகத்துடன் கூடிய ரவைகளை நிமிடத்திற்கு 240 வீதம் சுடுகிறது. ரவை ஒன்றின் நிறை 0·02 அவு. எனில், துப்பாக்கி வெளிப்படுத்திய குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக. [7·36]

5. 350 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 200-க்கு 1 சரிவில் மேல் நோக்கிச் சென்றுகொண்டிருக்கிறது. இயக்கத்திற்கான தடை டன்னுக்கு 12 பவு. எடை மணி 15 மைல் வேகத்தில் எஞ்சினின் குதிரைத்திறன் 500 என்றால், அப்பொழுதுள்ள முடுக்கம் எவ்வளவு ? [$\frac{73}{375}$ அடி/வி²]

6. 1 டன் நிறையுள்ள ஒரு கார் 10-க்கு 1 சரிவில் கீழ்நோக்கித் தானே இயங்கும்போது, மணிக்கு 32 மைல் என்னும் பெரும திசை வேகத்தை அடைகிறது. அதே திசை வேகத்துடன் 20-க்கு 1 சரிவில் மேல்நோக்கிச் செல்வதற்குத் தேவையான குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக. மற்ற எந்த வேகத்திலும் அதன் குதிரைத் திறனை ஏன் கணக்கிட முடியாது? [28·67]

7. 200 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, 150-க்கு 1 சரிவில் கீழ் நோக்கி இயங்கும்போது, 2 நிமிடங்களில் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தை அடைகிறது. எஞ்சினால் செயற்படுத்தப்பட்ட விசையையும் வெளிப்படுத்தப்பட்ட குதிரைத் திறனையும் கணக்கிடுக. அதே வண்டியை அந்தச் சரிவில் மேல் நோக்கி இயக்குவதற்குத் தேவையான குதிரைத்திறனைக் கணக்கிடுக. (தண்டவாளங்கள் கொடுக்கக்கூடிய தடை டன்னுக்கு 11 பவு. எடை) [$1\frac{79}{84}$ டன் எடை, 347·73, 825·6]

8. H குதிரைத்திறனுடன் வேலைசெய்யும் M டன்கள் நிறையையுடைய ஓர் எஞ்சின் ஒவ்வொன்றும் m டன்கள் நிறையுள்ள n பெட்டிகளை v மை/ம. என்ற சீரான திசைவேகத்துடன் இழுத்துச் செல்கிறது. எஞ்சின்மீதும் ஒவ்வொரு பெட்டியின்மீதும் செயற்படும் தடை எடைக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்குமாயின், எஞ்சினுக்கும் அதையடுத்த பெட்டிக்கும் இடையேயுள்ள இணைப்பின் இழுவிசை

$\frac{75}{448\,v}\cdot\frac{Hmn}{M+mn}$ டன்கள் எடை என நிறுவுக.

9. வினாடிக்கு 50 அடி வேகத்தில் கிடைமட்டத்தில் சென்றுகொண்டிருக்கும் 4 அவு. நிறையுள்ள துப்பாக்கி ரவை ஒரு நிலையான மரக்கட்டையில் 5 அங்குலம் ஊடுருவுகிறது. மரக்கட்டையின் தடிப்பு $2\frac{1}{2}$ அங்குலமாக இருந்தால், ரவை மரக்கட்டையைவிட்டு வெளியேறும் திசைவேகத்தைக் கணக்கிடுக.

[75000 படவுண்டல்கள் 353·5 அடி/வி]

10. 320 குதிரைத் திறனுடன் வேலைசெய்யும் ஓர் எஞ்சின் 200 டன்கள் மொத்த எடையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை மணிக்கு 40 மைல் சீரான வேகத்தில் சமதளத்தில் இழுத்துச்செல்லுகிறது. காற்று உராய்வினால் ஏற்படும் தடை ஒரு மாறுத எதிர்விசையை விளைவிக்குமாயின், அதன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

5. எறி பொருள்கள்

(Projectiles)

இதுவரை கிடைத்தளத்திலோ அல்லது செங்குத்தாகவோ இயங்கும் துகள்களைப்பற்றிப் பார்த்தோம். இனி, செங்குத்துத் தளத்தில் எந்தத் திசையிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைவேகத்துடன் எறியப்பட்ட ஒரு துகளின் இயக்கத்தைப்பற்றிப் பார்ப்போம், அத்தகைய துகளின் இயக்கத்தைப்பற்றி ஆராயும்பொழுது, புவியீர்ப்பு முடுக்கம் மாருமல் இருக்கிறது என்றும், துகளின் இயக்கத்திற்குக் காற்று, உராய்வினுல் ஏற்படும் தடை புறக்கணிக்கத்தக்க அளவுடையதாயிருக்கிறது என்றும் கருத்திற் கொள்ளவேண்டும்.

வரையறைகள்

துகள் எந்தப் புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகிறதோ, அப் புள்ளி எறிதானம் (point of projection) எனப்பெறும்.

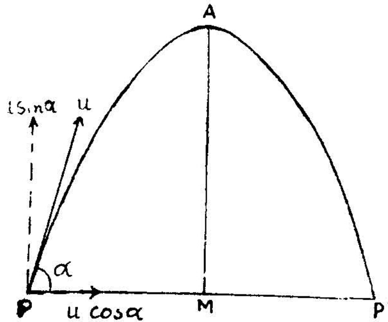
துகள் எறியப்படும் திசை கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் எறிகோணம் (angle of projection) எனப்படும்.

துகள் செல்லும் பாதை, எறிபொருள் பாதை (trajectory) எனப்படும்.

எறிதானத்திற்கும் அதன் வழியே செல்லும் எந்தவொரு தளத்தையும் எறிபொருள் பாதை சந்திக்கும் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு அந்தத் தளத்தில் எறிபொருளின் நெடுக்கம் (range) எனப்படும்.

துகள் எறியப்பட்ட கணத்திலிருந்து எறிதானத்தின் வழியாகச் செல்லும் கிடைத்தளத்தை அடையும் வரையுள்ள கால அளவு செல்லும் நேரம் (time of flight) எனப்படும்.

P என்ற புள்ளியிலிருந்து கிடைத்தளத்துடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் u என்ற திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு துகளைக் கருதுவோம். [படம் 5·1] அதன் திசை வேகத்தைக்கிடைமட்டத்திலும் செங்குத்தாகவும் முறையே u cos α



படம் 5·1

u sin α எனப்பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். செங்குத்தாகச் செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையானது, துகளின் திசைவேகத்தின் கிடைமட்ட ஆக்கக்கூறில் எவ்வித மாற்றத்தையும் விளைவிக்காது. எனவே, துகளின் இயக்கம் முழுவதும் கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறின் (u cos α) மதிப்பு மாறாது ; ஆனால், செங்குத்து ஆக்கக் கூறின் மதிப்பு தொடர்ந்து மாறும்.

தெரிவு 5·1. P என்ற புள்ளியிலிருந்து அதன் வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்துடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில், u என்ற திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படுவதாகக் கொள்வோம். 1. அது அடையும் பெரும உயரம், 2. செல்லும் நேரம், 3. P வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தில் அதன் நெடுக்கம் 4. ஒரு குறிப்பிட்ட காலஅளவின் இறுதியில் அதன் திசைவேகம், 5. எறிதானத்திலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்தில் திசைவேகம் ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்

1. படம் 5·1-ல் P, எறிதானத்தையும், PAP′ எறி துகள் பாதையையும் குறிக்கின்றன. AM என்பது துகள் அடைந்த பெரும உயரத்தைக் குறிக்கும்.

துகளின் இயக்கத்தின்போது திசைவேகத்தில் கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு (u cos α) மாறாமல் இருக்கும்; செங்குத்து ஆக்கக் கூறு (u sin α) புவியீர்ப்பு முடுக்கத்திற்கு உட்படும். பெரும உயரத்தில் செங்குத்து ஆக்கக் கூறின் மதிப்பு சுழியாகும்.

எனவே, சமன் 2·14-ல் $v=o$, $u=u \sin \alpha$, $a=-g$. $s=H$ (பெரும உயரம்) என்ற மதிப்புகளைப் பதிலீடு செய்வோமாயின்.

$$O = u^2 \sin^2 \alpha - 2gH$$

அல்லது $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

எனவே, துகள் அடையும் பெரும உயரம்

$$H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \ldots \quad \ldots \quad 5·1$$

மேலும், பெரும உயரத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t_1 எனின் சமம் 2.12-ன் படி

$$O = u \sin \alpha - g t_1$$

அல்லது $t_1 = \frac{u \sin \alpha}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad 5·2$

2. துகளின் செல்லும் நேரம் T எனக் கொள்வோம். T என்பது துகளானது P-லிருந்து புறப்பட்டு P-ன் வழியே செல்லும் கிடைத் தளத்தில் P′ என்ற புள்ளியை அடையும்வரை எடுத்துக்கொள்ளும் நேரமாகும். எனவே இந்தக் கால அளவில் துகள் செங்குத்துத் திசையில் பெற்ற இடப் பெயர்ச்சி சுழியாகும்; அதாவது சமன் 2·13-ல்

$$s = h = 0$$

மேலும், $u = u \sin \alpha$

$$a = -g$$

$$t = T$$

எனவே, $O = u \sin \alpha \times T - \frac{1}{2} gT^2$

அதாவது, $T = \frac{2 u \sin \alpha}{g}$

எனவே, துகளின் செல்லும் நேரம்

$$T = \frac{2u \sin \alpha}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad 5·3$$

3. துகளின் செல்லும் காலம் (T) முழுவதிலும் அதன் கிடைமட்டத் திசைவேகம் ($u \cos \alpha$) மாறுமல் இருக்கும்.

எனவே, T கால அளவில் துகள் கடந்த கிடைமட்டத்தைத் தொலைவு, அதாவது கிடைத்தளத்தில் அதன் நெடுக்கம்,

$$R = u\cos\alpha \times T$$

$$= u\cos\alpha \times 2u\frac{\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha$$

எனவே, கிடைத்தளத்தில் எறிதுகளின் நெடுக்கம்

$$R = \frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

அல்லது $$R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5{\cdot}4$$

சமன்பாடு 5·4-ல் $\sin 2\alpha = 1$ எனில், அதாவது $2\alpha = 90^\circ$ அல்லது $\alpha = 45^\circ$ எனில், ஒரு குறிப்பிட்ட எறிதிசை வேகத்திற்கு கிடைத்தளத்தில் நெருக்கம் பெரும மதிப்பை அடையும்.

எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட எறிதிசை வேகத்திற்கு எறி கோணம் 45° ஆக இருக்கும்போது கிடைத்தளத்தில் நெடுக்கம் பெருமமாகும். கிடைத்தளத்தில் பெரும நெடுக்கம் Rm எனின்,

$$Rm = \frac{u^2}{g}\sin 90$$

அதாவது, $$Rm = \frac{u^2}{g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5{\cdot}5$$

4. ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவின் (t) இறுதியில் அதன் திசைவேகம் கிடைத்தளத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் v எனக் கொள்வோம். எனவே, t அலகு கால அளவிற்குப்பின் துகளின் திசைவேகத்தின்

செங்குத்து ஆக்கக் கூறு $= v\cos\theta$

கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு $= v\sin\theta$.

எறிதிசை வேகத்தின் செங்குத்து ஆக்கக் கூறு $= u\sin\alpha$

t வினாடிகளின் இறுதியில் செங்குத்து ஆக்கக் கூறு சமன் 2·12ன்படி $\Big\} = u\sin\alpha - gt$

எனவே, $$v\sin\theta = u\sin\alpha - gt \quad \ldots \ldots \quad (i)$$

எறி திசைவேகத்தின் கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு ($u \cos \alpha$) மாறாமல் இருப்பதால், t வினாடிகளின் இறுதியில் கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு

$$v \cos \theta = u \cos \alpha \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii) ஆகியவற்றின் இருமடிகளைச் சேர்ப்போமாயின்,

$$v^2 = (u \sin \alpha - gt)^2 + u^2 \cos^2 \alpha$$

அல்லது $$v = \sqrt{(u^2 + g^2t^2 - 2ugt \sin \alpha)} \quad \dots \quad \dots \quad 5{\cdot}6$$

சமன்பாடு (i)-ஐ, சமன்பாடு (ii)-ஆல் வகுக்க,

$$\tan \theta = \frac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 5{\cdot}7$$

சமன்பாடுகள் 5·6, 5·7 t கால அளவின் இறுதியில் துகளின் திசைவேகத்தின் முறையே எண் மதிப்பு, திசை ஆகியவற்றைக் றைக் கொடுக்கின்றன.

5. எறிதானத்திலிருந்து h உயரத்தில் திசைவேகம் கிடைத்தளத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் v எனக் கொள்வோம். எனவே, h உயரத்தில் துகளின் திசைவேகத்தின்

$$\text{செங்குத்து ஆக்கக் கூறு} = v \sin \theta$$

$$\text{கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு} = v \cos \theta$$

எறிதிசைவேகத்தின் செங்குத்து ஆக்கக் கூறு $u \sin \alpha$ ஆதலால், சமன் 2·14-ன்படி $v \sin \theta = \sqrt{(u^2 \sin^2 \alpha - 2gh)} \dots (iii)$

எறிதிசைவேகத்தின் கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறுமாறாமல் இருக்குமாதலால்,

$$v \cos \theta = u \cos \alpha \quad \dots \quad \dots \quad (iv)$$

சமன்பாடுகள் (iii),(iv) லிருந்து

$$v^2 = u^2 - 2gh$$

அல்லது, $$v = \sqrt{(u^2 - 2gh)} \quad \dots \quad \dots \quad 5{\cdot}9$$

மேலும், $$\tan \theta = \frac{\sqrt{(u^2 \sin^2 \alpha - 2gh)}}{u \cos \alpha} \quad \dots \quad \dots \quad 5{\cdot}10$$

சமன்பாடுகள் 5·9, 5·10 h உயரத்தில் துகளின் திசைவேகத்தின் முறையே எண் மதிப்பு, திசை ஆகியவற்றைக் கொடுக்கின்றன.

தெரிவு 5·2: ஒரு குறிப்பிட்ட எறிதிசை வேகத்துடன் எறியப் படும் துகளின் குறிப்பிட்ட கிடைத்தள நெடுக்கத்திற்குப் பொதுவாக, இரு எறிதிசைகள் (directions of projection) உள்ளன என்றும் அவ் விரு திசைகளும் பெரும நெடுக்கத்திற்குரிய எறிதிசைக்குச் சம அளவில் சாய்ந்திருக்கின்றன என்றும் நிறுவுக.

ஒரு குறிப்பிட்ட எறிதிசைவேகத்திற்குக் (u) கிடைத்தளத்தில் நெடுக்கம் R எனக் கொள்வோம்.

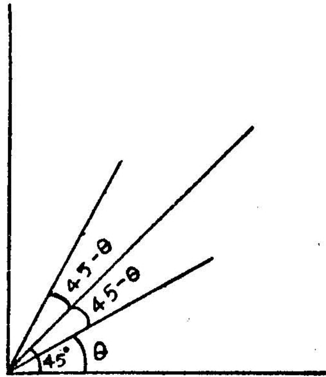
சமன்பாடு 5·4-ன்படி $R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$

அல்லது, $\sin 2\alpha = \frac{Rg}{u^2}$

R, u ஆகியவற்றின் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு $u^2 > Rg$ ஆக இருப்பின், மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் 2α க்கு 180°-ஐ விடக் குறைந்த இரு மதிப்புகள் உண்டு. 2θ என்பது ஒரு மதிப்பாயின் மற்றொரு மதிப்பு $180-2\theta$ ஆகும். ஏனெனில்,

$$\frac{Rg}{u^2} = \sin 2\theta = \sin 180-2\theta$$

எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட நெடுக்கத்திற்குரிய எறிகோணத்திற்கு $\theta, 90-\theta$ என மதிப்புகள் உண்டு. $\theta, 90-\theta$ ஆகிய இரு



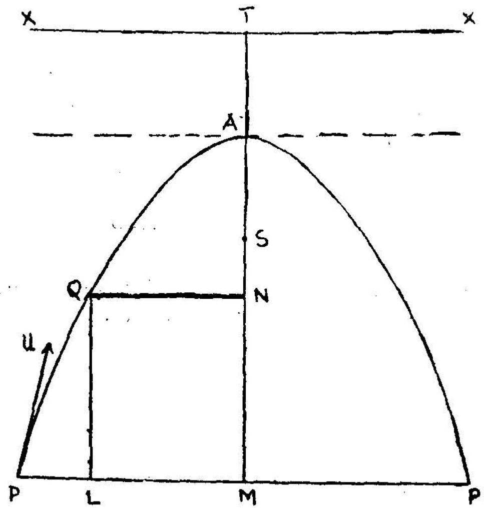
படம் 5·2

திசைகளும் முறையே கிடை மட்டத்திற்கும், செங்குத்து நிலைக்கும் சம அளவில் சாய்ந்திருப்பதாலும் பெரும நெடுக்கத்திற்குரிய எறி

திசை 45° ஆதலாலும் அவ்விரு திசைகளும் பெரும நெடுக்கத்திற்குரிய திசைக்குச் சம அளவில் சாய்ந்திருக்கின்றன. [படம் 5·2]. $u^2 = Rg$ எனில் ஒரே ஒரு மதிப்புதான் (அதாவது 90°) உண்டு. எனவே, $\alpha = 45°$. இது u என்ற எறிதிசை வேகத்திற்கு பெரும நெடுக்கத்திற்குரிய எறிகோணமாகும்.

தெரிவு. 5.3: எறிதுகளின் பாதை ஒரு பரவளைவு என நிறுவுக

படம் 5·3-ல் P, துகளின் எறிதானத்தையும் α, எறிகோணத்தையும் PAP', எறிதுகள் பாதையையும் A, அப் பாதையின் உச்சிப் புள்ளியையும் PP', கிடைத்தளத்தில் நெடுக்கத்தையும் குறிக்



படம் 5·3

கின்றன. A-லிருந்து PP'-க்கு வரையப்பட்ட நேர்குத்துக்கோடு (AM) துகள் அடையும் பெரும உயரத்தைக் குறிக்கும். எறிகோணம் α எனக் கொள்வோம். எறிதுகள் அது எறியப்பட்ட கணத்திலிருந்து t கால அளவுக்குப்பின், அதன் பாதையில் Q என்ற புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். Q-லிருந்து PP'AM ஆகியவற்றிற்கு முறையே, QL, QN என்ற நேர்குத்துக் கோடுகளை வரையவும். இனி, சமன் 5·1-ன்படி,

$$AM = \frac{u^2}{2g} \sin^2\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$PM =$ துகள் $\frac{u}{g} \sin \alpha$ (சமன் 5·2) கால அளவில்

கடந்த கிடை மட்டத் தொலைவு

$$= \frac{u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

மேலும், $QL\ (=t)$ கால அளவில் துகள் கடந்த செங்குத்துத் தொலைவு சமன் 2·12-ன் படி

$$= u \sin \alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

$$PL = u \cos \alpha\, t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

இனி, $AN = AM - NM = AM - QL$

சமன்பாடுகள் (i), (iii) லிருந்து,

$$AN = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha - (u \sin \alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$= \frac{g}{2}\left[\frac{u \sin \alpha}{g} - t\right]^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$

மேலும், $QN = PM - PL$

சமன்பாடுகள் (iii), (iv)-லிருந்து

$$QN = \frac{u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha - u \cos \alpha\, t$$

$$= u \cos \alpha \left(\frac{u \sin \alpha}{g} - t \right)$$

எனவே, $$QN^2 = u^2 \cos^2 \alpha \left[\frac{u \sin \alpha}{g} - t\right]^2$$

$$= \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} \times AN \text{ (சமன் v)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (vi)$$

AM-ல் $AS = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$ என்னுமாறு S என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோமாயின் சமன் (vi)-ஐ

$$QN^2 = 4\, AS \times AN \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 5{\cdot}11$$

என எழுதலாம்.

சமன்பாடு 5·11, S என்ற புள்ளியைக் குவியமாகவும் (focus) A-ஐ உச்சியாகவும் (veitex) செங்குத்தான அச்சையும் (axis) 4 AS$(=\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha)$-ஐ நேரகலமாகவும் (latus rectum) கொண்ட ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கிறது.

எனவே, எறி துகள் பாதை ஒரு பரவளைவு ஆகும்.

மற்றொரு முறை: படம் 5·3-ல் PM-ஐ X அச்சாகவும் P-லிருந்து AM-க்கு இணையாக மேல்நோக்கி வரையப்பட்ட கோட்டை Y அச்சாகவும் கொள்வோமாயின், Q-ன் ஆயத்தொலைவுகள்

$$x=u\cos\alpha\, t \qquad \text{.........(vii)}$$

$$y=u\sin\alpha\, t-\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{.........(viii)}$$

$$\therefore \quad y=x\tan\alpha-\frac{g\,x^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad \text{.........5.2}$$

இந்தச் சமன்பாடு $\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha$-ஐ நேரகலமாகக் கொண்ட ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

தெரிவு 5·4 : எறிதுகள் பாதையில் எந்தப் புள்ளியிலும் துகளின் திசை வேகத்தின் எண் மதிப்பு, துகள் பரவளைவின் இயக்கு வரையிலிருந்து (directrix) அப் புள்ளிக்குத் தானே விழும்போது பெறக்கூடிய திசை வேகத்தின் எண் மதிப்புக்குச் சமமாகும்.

படம் 5·3-ல் $\times T\times'$ பரவளைவின் இயக்கு வரையைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். பரவளைவின் வரையறையின்படி,

$$AT=AS=\frac{u^2}{2g}\cos^2\alpha$$

PP′-க்குமேல் இயங்குவரையின் உயரம்

$$MT=AM+AT$$

$$=\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha+\frac{u^2}{2g}\cos^2\alpha$$

$$=\frac{u^2}{2g}$$

இது எறிதானத்திலிருந்து துகள் செங்குத்தாக எறியப்படுமாயின், அது பெறக்கூடிய பெரும உயரமாகும்.

எறிதுகள் பாதையில் Q என்ற புள்ளியைக் கருதுவோம். [படம் 5·3] Q ல் துகளின் திசை வேகம் சமன் 5·9-ன் படி,

$$V=\sqrt{(u^2-2g\times QL)}$$

இயக்கு வரையிலிருந்து Q ன் ஆழம்

$$=\frac{u^2}{2g}-QL$$

இயக்கு வரையிலிருந்து துகள் தானே விழும்பொழுது, அது பெறும் திசை வேகம் சமன் 2·14-ன்படி

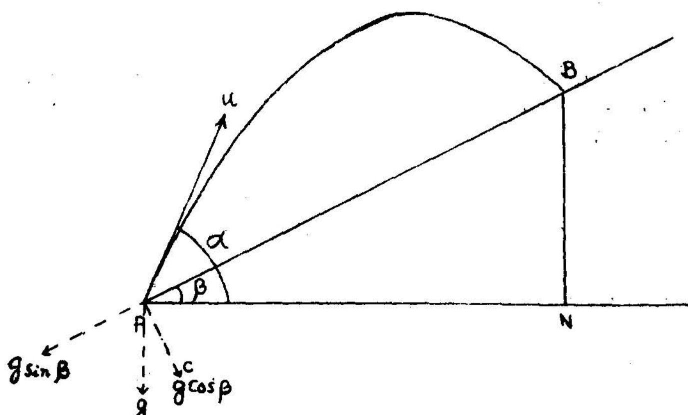
$$V=\sqrt{\left[2g\left(\frac{u^2}{2g}-QL\right)\right]}$$

$$V=\sqrt{(u^2-2g\times QL)}$$

எனவே, பரவளைவில் எந்தப் புள்ளியிலும் துகளின் திசை வேகத்தின் எண் மதிப்பு, துகள் பரவளைவின் இயக்குவரையிலிருந்து அப் புள்ளிக்குத் தானே விழும்பொழுது பெறக்கூடிய திசை வேகத்தின் எண் மதிப்புக்குச் சமமாகும்.

எறிதானத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு சாய்தளத்தில் துகளின் நெடுக்கம் :

கிடைத்தளத்துடன் β என்ற கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் சாய்தளம் ஒன்றின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து சாய்தளத்தின்



படம் 5·4

பெரும வாட்டக் கோட்டின் (line of greatest slope) வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படும் ஒரு துகளைக் கருது

வோம். சாய்தளத்தில் அதன் நெடுக்கத்தைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

படம் 5.4-ல் P, எறிதானத்தையும், α, எறிகோணத்தையும் குறிக்கின்றன. PB என்பது சாய்தளத்தில் துகளின் நெடுக்கம் எறிதிசை வேகம் u என இருக்கட்டும்.

எறிதிசை வேகத்தைச் சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் (Pβ) நேர்குத்துத் திசையிலும் (PC) முறையே u cos $(\alpha-\beta)$, u sin $(\alpha-\beta)$ என இரு ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். அவ்வாறே செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தை மேற்கூறிய இரு ஆக்கக் கூறுகளின் திசைகளில்முறையே, $-g \sin\beta$, $-g\cos\beta$ என இரு ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். (விசைகளின் தற்சார்புக் கோட்பாட்டின்படி தளத்திற்கு இணையாகத் துகளின் இயக்கம் தளத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையில் துகளின் இயக்கத்தைச் சார்ந்திருக்காது.) துகள் P-லிருந்து B-க்குச் செல்வதற்குரிய கால அளவு T_1 எனக் கொள்வோம். இந்தக் கால அளவில் சாய்தளத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையில் துகள் பெற்ற இடப்பெயர்ச்சி சுழியாகும்.

எனவே, சமன் 2.13-ன்படி

$$O=u\,(\sin\alpha-\beta)\,T_1=\tfrac{1}{2}\,g\cos\beta\,T_1^2$$

அல்லது $T_1=\dfrac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$

மேலும், இந்தக் கால அளவில் துகளின் கிடைமட்டத் திசை வேகம், u cos α, மாறுமலிருக்குமாதலால், துகள் கடந்த கிடைமட்டத்தொலைவு PN$=u\cos\alpha\times T_1$

$$=\frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos\beta}$$

இனி, $PB=\dfrac{PN}{\cos\beta}$

எனவே, சாய்தளத்தில் துகளின் நெடுக்கம்

$$R_I=\frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta} \quad \ldots \quad \ldots \quad 5.13.$$

சாய்தளத்தில் பெரும நெடுக்கம் : கிடைத்தளத்திற்கு β என்ற கோணத்தில் அமைந்த சாய்தளத்தில் நெடுக்கம்

$$R_1 = \frac{2u^2 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta}$$

அல்லது $$R_1 = \frac{u^2}{g \cos^2 \beta}\left[\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta\right]$$

u, β ஆகியவற்றின் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு

$$\sin(2\alpha - \beta = 1$$

அதாவது, $$(2\alpha - \beta) = 90°$$

அல்லது $$\alpha = 45 + \frac{\beta}{2}$$

என்னும்போது, R_1-ன் மதிப்புப் பெருமமாகும்.

எனவே, சாய்தளத்தில் பெரும நெடுக்கம்

$$R'_m = \frac{u^2}{g \cos^2 \beta}(1 - \sin \beta)$$

அல்லது $$R_{1m} = \frac{u^2}{g(1 + \sin \beta)} \quad \text{..........................5.14.}$$

மேலும், சாய்தளத்தில் பெரும நெடுக்கத்திற்கு

$$2\alpha - \beta = 90°$$

அல்லது $$\alpha - \beta = 90 - \alpha$$

எனவே, சாய்தளத்தில் பெரும நெடுக்கத்திற்குரிய திசை செங்குத்துத் திசைக்கும் சாய்தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தை இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது.

தெரிவு 5.5 : ஒரு குறிப்பிட்ட எறிதிசை வேகத்திற்குச் சாய் தளத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட நெடுக்கத்தைக் கொடுக்கக்கூடிய இரு எறிதிசைகள் உள்ளன. அவ்விரு திசைகளும் சாய்தளத்தில் பெரும நெருக்கத்திற்குரிய திசைக்குச் சம அளவில் சாய்ந்துள்ளன.

சாய்தளத்தில் நெடுக்கம்

$$R_1 = \frac{u^2}{g \cos^2 \beta}\left[\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta\right]$$

u, β, R ஆகியவற்றின் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு sin $(2\alpha - \beta)$ ஒரு குறிப்பிட்ட மாறுத மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். sin $(2\alpha - \beta)$-க்கு மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துமாறு 180°-ஐ

விடக் குறைந்த இரு மதிப்புகள் உண்டு. ஒன்று θ எனில் மற்றொன்று $180-\theta$ ஆகும்.

ஏனெனில், $\sin(2\alpha-\beta)=\sin\theta=\sin(180-\theta)$

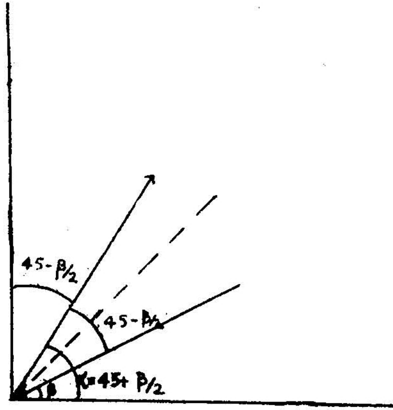
எனவே $2\alpha-\beta=\theta$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{\theta}{2}+\frac{\beta}{2}$$

அல்லது $2\alpha-\beta=180-\theta$

$$\therefore \quad \alpha=90+\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}$$

எனவே, சாய்தளத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட நெடுக்கத்திற்குரிய எறிகோணத்திற்கு $\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$, $\left(90+\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$ என்ற இரு மதிப்புகள் உண்டு.



படம் 5.5

மேலும் α-ன் இரு மதிப்புகளின் சராசரி

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\beta}{2}\right)+\left(90+\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=45+\frac{\beta}{2}$$

= சாய்தளத்தில் பெருமநெடுக்கத்திற்குரிய எறி கோணம்.

எனவே, $\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$, $90+\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}$ என்ற இரு திசைகளும் பெரும நெடுக்கத்திற்குரிய திசைக்கு $\left(45+\frac{\beta}{2}\right)$ சம அளவில் சாய்ந்திருக்கின்றன. (படம் 5·5)

மாதிரிக் கணக்கு 1. ஒரு மனிதன் ஒரு பந்தைச் செங்குத்தாக 49 கெஜ உயரத்திற்கு எறிய முடியுமாயின், கிடைமட்டத்தில் அவன் அப் பந்தை எறியக்கூடிய பெருமத் தொலைவு என்ன?

செங்குத்தாக எறியும்போது :

பெரும உயரம் h = 49 கெ. = 147 அடி.

பெரும உயரத்தில் திசைவேகம் v = o

முடுக்கம் a = $-g = -32$ அடி/வி^{2}.

எனவே, பந்து எறியப்பட்ட வேகம் u எனில் சமன் 2·14ன்படி

$$u^2 = 2gh$$
$$u^2 = 2 \times 32 \times 147$$

அதே வேகத்துடன் செங்குத்து நிலைக்கு 45° கோணத்தில் அந்தப் பந்தை எறிந்தால் அது கிடைத்தளத்தில் பெருமத் தொலைவைக் கடக்கும்.

ஆனால் கிடைத்தளத்தில் பெரும நெடுக்கம் சமன் 5·5 ன்படி

$$Rm = \frac{u^2}{g}$$
$$= \frac{2 \times 32 \times 147}{32} \text{ அடி.}$$
$$= 98 \text{ கெஜம்.}$$

எனவே கிடைத்தளத்தில் பந்து எறியப்படக்கூடிய பெருமத் தொலைவு 98 கெஜம் ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 2. ஒரு எறி துகள் அடைந்த பெரும உயரம் 64 அடி. கிடைத்தளத்தில் அதன் நெடுக்கம் $256\sqrt{3}$ அடி. அதன் எறி திசைவேகத்தையும் எறி கோணத்தையும் கணக்கிடுக.

எறி திசைவேகம் u எனவும் எறிகோணம் α எனவும் கொள்வோம்.

பெரும உயரம் $H = \dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

அதாவது, $64 = \dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

கிடைத்தளத்தில் நெடுக்கம் $R = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

எனவே, $256\sqrt{3} = \dfrac{2u^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$

$\therefore \quad \dfrac{64}{256\sqrt{3}} = \dfrac{\tan\alpha}{4}$

அல்லது $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

எனவே, $\alpha = 30^\circ$

மேலும், $\sin\alpha = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$64 = u^2 \times \frac{1}{4} \times \dfrac{1}{2 \times 32}$

$u^2 = 64 \times 64 \times 4$

அல்லது $u = 64 \times 2$

$= 128$ அடி/வி.

எனவே, துகளின் எறி திசை வேகம் $= 128$ அடி/வி.

எதி கோணம் $= 30^\circ$.

மாதிரிக் கணக்கு 3. ஒரு எறிதுகள் அடையக்கூடிய பெரும உயரம் h, கிடைத்தளத்தில் அதன் நெடுக்கம் R என்றால் அதன் எறி திசைவேகம் $u = \left[2g\left(h + \dfrac{R^2}{16h}\right)\right]$ எனக் காட்டுக.

துகளின் எறிதிசை வேகம் u எனவும் எறிகோணம் α எனவும் கொள்வோம்.

துகள் அடையும் பெரும உயரம் $h = \dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$ ... (i)

கிடைத்தளத்தில் நெடுக்கம் $R = \dfrac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$ ... (ii)

சமன் (i)லிருந்து

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{u^2}{2gh}$$

மேலும், $\frac{R}{h} = \frac{(2u^2 \sin\alpha \cos\alpha)/g}{u^2 \sin^2\alpha/2g}$

$= 4 \cot\alpha$

அல்லது $\cot\alpha = \frac{R}{4h}$

மேலும் $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1+\cot^2\alpha$

$\therefore \quad \frac{u^2}{2gh} = 1 + \frac{R^2}{16h^2}$

$u^2 = 2g\left(h + \frac{R^2}{16h}\right)$

$\therefore \quad u = \left[2g\left(h + \frac{R^2}{16h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$

மாதிரிக் கணக்கு 4: ஒரு எறி துகள் நிலமட்டத்திலுள்ள எறி தானத்திலிருந்து h உயரத்திலுள்ள ஓர் புள்ளியை அடைய t_1 விஞடிகளும், அப் புள்ளியிலுருந்து திரும்பவும் நில மட்டத்தை யடைய t_2 விஞடிகளும் எடுத்துக்கொள்ளுமாயின் $h=\frac{1}{2}g t_1 t_2$ என நிறுவுக.

துகளின் எறிதிசை வேகம் u எனவும் எறிகோணம் α எனவும் கொள்வோம். எறிதுகளின் செல்லும் நேரம் T எனக் கொள்வோ மாயின், $T = t_1+t_2 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ (சமன் 5·3)

மேலும், சமன் 2·13-ன்படி $h = u\sin\alpha \times t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$

ஆனல், $u\sin\alpha = \frac{gT}{2} = \frac{g}{2}(t_1+t_2)$

$\therefore \quad h = \frac{g}{2}t_1^2 + g\frac{t_1 t_2}{2} - \frac{g}{2}t_1^2$

$h = \frac{1}{2}g t_1 t_2.$

மாதிரிக் கணக்கு 5. கிடைத்தளத்திற்கு 60° கோணத்தில் கீழ்நோக்கிச் சாய்ந்துள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து ஓர் துகள் எறியப்படுகிறது. எறிதிசை (i) கிடைத்தளத்திற்குமேல் 30° கோணத்திலும் (ii) கிடைத்தளத்திற்குக்கீழ் 30° கோணத்திலும் இருந்தால் சாய்தளத்தில் முதலாவது திசைக்குரிய நெடுக்கம் இரண்டாவது திசைக்குரிய நெடுக்கத்தைப்போல் இருமடங்கு என நிறுவுக.

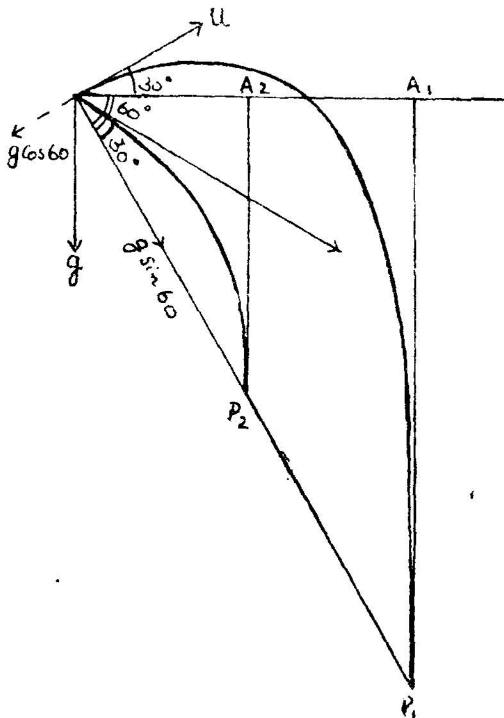
துகளின் எறிதிசைவேகம் u எனக் கொள்வோம். படம் 5·6 ல் தொடர்ச்சியான கோடு முதல் எறி கோணத்திற்குத் துகள் பாதையையும் புள்ளிக்கோடு துகளின் இரண்டாவது எறிகோணத்திற்குரிய பாதையையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

முதல் எறிகோணத்திற்குரிய நெடுக்கம் = $P P_1$

இரண்டாவது எறிகோணத்திற்குரிய நெடுக்கம் = $P P_2$

தளத்திற்கு நேர்குத்தான திசையில் எறிதிசை வேகத்தின் ஆக்கக் கூறு = u $[\because P_1 \hat{P} T_1 = 90°]$

துகள் P-லிருந்து P_1-ஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும்நேரம்



படம் 5·6

T_1 என இருக்கட்டும்.

T_1 கால அளவில் தளத்திற்கு நேர் குத்தான திசையில் துகளின் இடப்பெயர்ச்சி சுழியாகும். எனவே சமன் 2·13 ன்படி.

$$0 = u T_1 - \frac{1}{2} g \cos \theta T_1^2$$

அல்லது $T_1 = \frac{4u}{g}$

துகளின் திசைவேகத்தின் கிடைத்தள ஆக்கக் கூறு (u cos 30) மாறுமலிருக்குமாதலால், T_1 காலத்தில் துகள் பெறும் கிடைத்தள இடப் பெயர்ச்சி $PA_1 = u \cos 30 \times T_1$

$$= u\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4u}{g}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}u^2}{g}$$

∴ முதலாவது எறி கோணத்திற்குரிய நெடுக்கம்,

$$PP_1 = \frac{PA_1}{\cos 60} = \frac{4\sqrt{3}u^2}{g}$$

தளத்திற்கு நேர்குத்தான திசையில் ஏவுதிசை வேகத்தின் ஆக்கக் கூறு $= u \sin 30 = \frac{u}{2}$

துகள் P-லிருந்து P_2-ஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் T_2 எனின், $0 = \frac{uT_2}{2} - \frac{1}{2} g \cos 60 T_2^2$

அல்லது $T_2 = \frac{2u}{g}$

துகளின் திசைவேகத்தின் கிடைத்தள ஆக்கக் கூறு $= u \cos 30$. எனவே, T_2 கால அளவில் துகள் பெறும் கிடைத்தள இடப் பெயர்ச்சி,

$$PA_2 = u \cos 30 \times T_2$$

$$= u\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2u}{g}$$

$$= \frac{\sqrt{3}u^2}{g}$$

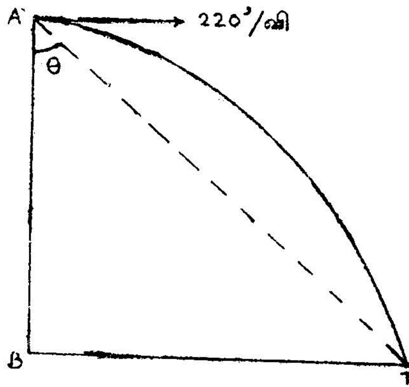
∴ இரண்டாவது எறி கோணத்திற்குரிய நெடுக்கம்,

$$PP_2 = \frac{PA_2}{\cos 60} = \frac{2\sqrt{3}u^2}{g}$$

எனவே $PP_1 = 2 PP_2$

மாதிரிக் கணக்கு 6 : 3000 அடி உயரத்தில் மணிக்கு 150 மைல் வேகத்தில் கிடைமட்டத்தில் நேராகச்சென்றுகொண்டிருக்கும் விமானத்திலிருந்து அதன் திசைக்குச் செங்குத்தாகக் கீழேயுள்ள ஒரு கோட்டையின்மீது குண்டு போடவேண்டும். விமானத்திலிருந்து குண்டை விடுவிக்கவேண்டிய கணத்தில் ஆகாய விமானத்தைக் கோட்டையுடன் இணைக்கும் கோட்டிற்கும் செங்குத்து நிலைக்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தை மதிப்பிடுக.

படம் 5·7ல் A, குண்டு விடுவிக்கப்படவேண்டிய கணத்தில்



படம் 5·7

விமானத்தின் நிலையையும் B, A-க்குக் கீழ் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு புள்ளியையும் T, கோட்டையையும் குறிக்கின்றன.

ஆகாய விமானத்திலிருந்து குண்டு விடுவிக்கப்படும் கணத்தில் அது கிடைமட்டத்தில் 220 அடி/வி. திசைவேகத்தையும் செங்குத்துத் திசையில் சுழி திசை வேகத்தையும் கொண்டிருக்கும். குண்டு செங்குத்தாக AB உயரத்தை எடுத்துக்கொள்ளும் அதே நேரத்தில் கிடைமட்டத்தில் BT என்ற தொலைவைக் கடக்கும்.

∴ குண்டு AB = 3000 அடி உயரத்தைக் கடப்பதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t என்றால் சமன் 2·13-ன்படி

$$3000 = \frac{1}{2} \times 32 \times t^2$$

$$t = \frac{10}{4}\sqrt{30} \text{ விநாடி.}$$

குண்டின் கிடைமட்டவேகம் மாறாமலிருக்குமாதலால், குண்டு t விநாடியில் கடக்கும் கிடைமட்டத் தொலைவு,

$$BT = \frac{10}{4}\sqrt{30} \times 220 \text{ அடி}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{BT}{AB} = \frac{10\sqrt{3} \times 220}{4 \times 3000} = \frac{11\sqrt{3}}{60}$$

$$\theta = 45°7'$$

பயிற்சி V

1. 50 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோட்டையின் உச்சியிலிருந்து கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் எறியப்பட்ட ஒரு துகள், நில மட்டத்தை 45° கோணத்தில் வந்தடைகிறது. எறிதானத்திலிருந்து துகள் நிலமட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியின் தாழ்வுக் கோணம் (angle of depression) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

2. 4 அடி உயரத்திலிருந்து கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் 80 [illegible] வி. வேகத்துடன் எறியப்பட்ட கிரிக்கெட் பந்து ஒன்றை, ஒரு வயலர் (fields man) நில மட்டத்திலிருந்து ஓர் அடி உயரத்தில் பிடிக்கிறார். அவர்களுக்கிடையேயுள்ள தொலைவைக் கணக்கிடுக. [178·3 அடி]

3. இரு இணையான சுவர்களின் உச்சிகளை உராய்ந்து செல்லுமாறு ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. முதல் சுவர் a அலகு உயரமுடையதாயும் எறிதானத்திலிருந்து b அலகு தொலைவிலும் உள்ளது. இரண்டாவது சுவர் b அலகு உயரமுடையதாகவும் எறிதானத்திலிருந்து a அலகு தொலைவிலும் உள்ளது. பந்தின் பாதை இரு சுவர்களுக்கும் நேர்குத்தான தளத்தில் அமையுமாயின், கிடைத்தளத்தில் பந்தின் நெடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. எறி கோணம் $\tan^{-1}3$-ஐ விட அதிகமானது எனக் காட்டுக.

$$\left[\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right]$$

4. 8 அடி உயரமுள்ள கோலின் முன்னால் 4 கெஜ தொலைவிலிருந்து ஏவப்பட்ட ஒரு காற்பந்து, கோலின் உச்சித் தண்டுக்குச் சற்றுக் கீழாகச்சென்று கோலுக்குப் பின்னால், 2 கெஜ தொலைவில் விழுகிறது. பந்தின் பாதைவழியே செல்லும் செங்குத்துத் தளம் கோலின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாக இருக்குமாயின், பந்தின் ஏவுதிசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

[$12\sqrt{5}$ அடி/வி.
கிடைமட்டத்துடன் $\tan^{-1} 2$ கோணத்தில்]

5. ஒரு பொருள், கிடைமட்டத்தில் அதன் நெடுக்கமானது அது அடையும் பெரும உயரத்தைப்போல், மூன்று மடங்கு இருக்கு மாறு அடிவானத்திற்கு α என்ற கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. எறிகோணத்தைக் கணக்கிடுக. இந்த எறிகோணத்திற்கு 400 கெஜம் நெடுக்கம் இருக்கவேண்டுமாயின், தேவைப்படும் எறிதிசை வேகத்தையும், செல்லும் நேரத்தையும் கணக்கிடுக.

[$\tan^{-1}\frac{3}{4}$, 200 அடி/வி, 10 விநுடிகள்]

6. செங்குத்துத் தளத்திலமைந்த இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் உச்சிகளின் வழியே செல்லுமாறு, நிலமட்டத்திலிருந்து ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. முக்கோணத்தின் 12 அடி நீளமுள்ள அடிக்கோடு (base) கிடைமட்டமாகவும், நிலமட்டத்திலிருந்து 16 அடி உயரத்திலும் இருக்கிறது. முக்கோணத்தின் உச்சி A, BC-யிருந்து 9 அடி உயரத்தில் இருக்குமாயின், நிலமட்டத்தின் துகளின் நெடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. [20 அடி]

7. விமான எதிர்ப்புத் துப்பாக்கி ஒன்று 0·2 மைல்/மணி தொடக்கவேகத்துடன் ஒரு குண்டைச் சுடுகிறது. காற்றினுல் ஏற்படும் தடையைப் புறக்கணிப்போமாயின், 3024 அடி உயரத்தில் பறக்கும் விமானமொன்றை எந்தப் பெரும கிடைத்தளத் தொலைவில் அது சுடமுடியும்? அதற்குத் தேவைப்பட்ட துப்பாக்கிச் சரிவுக் கோணம் என்ன? குண்டு, விமானத்தை அடிக்க சுமார் 44·6 விநுடிகள் எடுத்துக்கொள்ளுகிறது என்று காட்டுக.

$$\left[31680 \text{ அடி } \cos^{-1}\frac{150}{223}\right]$$

8. 100 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்து போடப்படுகிறது. அதே நேரத்தில் நிலமட்டத்தில் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 50 அடி தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதே நிறையுள்ள மற்றொரு பந்து முதற்பந்தை அதன் பாதி வழியில் மோதுமாறு எறியப்படுகிறது. இரண்டாவது பந்தின் தொடக்கத் திசை வேகத்தையும் எறிதிசையையும் மதிப்பிடுக. மோதலுக்குப்பின் இரு பந்துகளும் ஒன்றுபடுமாயின், அவை நில மட்டத்தையடைய எவ்வளவு நேரம் எடுத்துக்கொள்ளும்?

[$20\sqrt{10}$ அடி/வி., $\tan^{-1} 2$, 1·[illegible] வி.]

9. அடிவானத்திற்கு 30' கோணத்தில் சாய்ந்த ஒரு சாய் தளத்தின் அடியிலிருந்து எறியப்பட்ட ஒரு துகளின் சாய்தளத்தில் நெடுக்கம் 768 அடி இருக்கவேண்டுமாயின், துகளின் மிகக்குறைந்த எறிதிசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக. [192 அடி/வி.]

10. ஒரு குறிப்பிட்ட எறிதிசைவேகத்திற்குக் கிடைத்தளத்தில் பெரும நெடுக்கம் 3000 மீட்டர்கள். கிடைத்தளத்துடன் 30°

கோணத்தை அமைக்கும் சாய்தளம் ஒன்றில் அத் துகளின் கீழ் நோக்கிய, மேல் நோக்கிய பெரும நெடுக்கங்களைக் கணக்கிடுக.
[2000 மீட்டர்கள், 6000 மீட்டர்கள்]

11. எறிதானத்தின் வழியாகச் செல்லும் சாய்தளத்தில் பெரும நெடுக்கமானது துகள், செல்லும் நேரத்தில் தானே விழக்கூடிய தொலைவுக்குச் சமம் என நிறுவுக.

12. ஒரு குன்று கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. குன்றின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிடைமட்டத்திற்கு 45° கோணத்தில் மேல்நோக்கி ஒரு துகளும் கீழ் நோக்கி ஒரு துகளும் எறியப்படுகின்றன. இரு துகள்களின் எறி திசை வேகங்கள் சமமாயின், அவற்றின் நெடுக்கங்களை ஒப்பு நோக்குக. [15 : 4]

13. ஒரு குன்றின் அடிவாரத்திலுள்ள ஒரு படைவீரர் அவருடைய துப்பாக்கியைக் குன்றின் உச்சியிலுள்ள எதிரிப் பாசறைகளுள் ஏதோ ஒன்றை நோக்கிக் குறிவைக்கிறார். குன்றின் உச்சி அதன் அடிவாரத்திலிருந்து 2-க்கு 1 சரிவின் வழியே 5400 அடி தொலைவில் உள்ளது. துப்பாக்கி ரவை எதிரிப் பாசறையைத் தாக்குமாறு கிடைமட்டத்திற்கு 60° கோணத்தில் சுடப்படுமாயின், அதன் ஏவு திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக. [$360\sqrt{2}$ அடி/வி.]

14. u திசை வேகத்துடன் எறியப்பட்ட ஒரு துகள், எறிதானத்தின் வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்திற்கு β கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு தளத்தை நேர்குத்தாக மோதுகிறது. செல்லும் நேரம் $\dfrac{2u}{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$ என நிறுவுக.

15. சாய்தளம் ஒன்றில் ஒரு துப்பாக்கி அமைந்துள்ளது. தளத்தின்மீது, மேல்நோக்கிய, கீழ்நோக்கிய பெரும நெடுக்கங்கள் முறையே L_1, L_2 சாய்தளத்தில் பெரும வாட்டக் கோட்டிற்கு நேர்குத்துத் திசைக்குரிய (எறிதிசை) பெருமநெடுக்கம் L என்றால்,

$$\frac{2}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$ என நிறுவுக.

16. கிடைமட்டத்துடன் 30° கோணத்தை அமைக்கும் ஒரு சாய்தளத்தில் மேல்நோக்கி இரு துகள்கள் கிடைமட்டத்திற்கு 60° கோணத்தில் எறியப்படுகின்றன. ஒன்று V என்ற திசை வேகத்துடனும் மற்றொன்று $\dfrac{2v}{\sqrt{3}}$ என்ற திசைவேகத்துடனும் எறியப்படுகின்றன. அத் துகள்கள் எறியப்பட்ட கணத்திலிருந்து $\dfrac{2V}{3g}$ வினாடிகளின் இறுதியில் ஒன்றைப்பொறுத்து மற்றது ஓய்வில் இருக்கிறது என நிறுவுக.

17. ஒரு வண்டியின் முன், பின் சக்கரங்களின் ஆரங்கள் முறையே a, b ஆகும்; அவற்றின் இருசுக் கூடுகளுக்கு (axle trees) இடையேயுள்ள தொலைவு c. பின் சக்கரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஏவப்பட்ட மண்கட்டி ஒன்று முன் சக்கரத்தின் உச்சியை அடைகிறது. வண்டியின் திசை வேகம் $v = \sqrt{\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4(b-a)}}$ என நிறுவுக.

18. கிடைமட்டத்திலிருந்து 2 மைல் உயரத்தில் மணிக்கு 120 மைல் வேகத்துடன் கிடைமட்டத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு விமானத்திலிருந்து, கிடைமட்டத்தில் பின்னோக்கி 960 அடி/வி. திசை வேகத்துடன் ஒரு ரவை சுடப்படுகிறது. காற்றினால் ஏற்படும் தடையைப் புறக்கணிப்போமாயின், ரவை நிலமட்டத்தை அடையும் பொழுது இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் திசையை மதிப்பிடுக.

[கிடைமட்டத்துடன் 46° 22′]

19. 100 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து விநாடிக்கு 30 அடி வேகத்துடன் ஒரு கல் கிடைமட்டத்தில் எறியப்படுகிறது. அது நில மட்டத்தை அடைய எவ்வளவு நேரம் எடுத்துக்கொள்ளும்? எந்தத் திசை வேகத்துடன் நில மட்டத்தை மோதும்? [2·5 வி, 80 அடி/வி.]

20. கடல் மட்டத்திலுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து 15 மைல் தொலைவிலுள்ள ஒரு கப்பலை நோக்கிச் சுடப்பட்ட ஒரு குண்டு 22500 அடி உயரத்திற்குச் செல்லுகிறது. குண்டின் செல்லும் நேரத்தையும் துப்பாக்கியின் சரிவுக் கோணத்தையும் கணக்கிடுக,

[75 வி, 48° 40′]

21. தரைமட்டத்திலுள்ள O என்ற புள்ளியிலிருந்து மேல் நோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு பந்து O-விருந்து 300 அடி தொலைவில் 3·75 விநாடிகளுக்குப் பிறகு நிலமட்டத்தை வந்தடைகிறது. அதன் தொடக்கத் திசை வேகத்தின் கிடைமட்ட, செங்குத்து ஆக்கக் கூறுகளைக் கணக்கிடுக. பந்து O-விருந்து 60 அடி தொலைவில் ஒரு மரத்தின் உச்சியைத் தொட்டுச் செல்கிறது. மரத்தின் உயரத்தையும் பந்து மரத்தைக் கடக்கும்போது அதன் வேகத்தையும் கணக்கிடுக.

[80′/வி 60.′/வி, 45′, கிடைமட்டத்திற்கு 24° 13′ கோணத்தில் 87·7′/வி.]

6. தாக்கு, தாக்கு விசை, மோதல்

(Impulse, Impulsive force, Impact)

தாக்கு

மாருத விசை ஒன்று (f) ஒரு பொருளின்மீது t கால அளவிற்குச் செயற்படுமாயின், அவ் விசை, அக் கால அளவு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலன் தாக்கு எனப்படும்.

அதாவது, தாக்கு $I = F \times t$

பொருளின் தொடக்கத் திசைவேகம் u, இறுதித் திசைவேகம் v, முடுக்கம் a, நிறை m என்ருல்,

$$I = \frac{m(v-u)}{t} \times t$$

அல்லது, $I = m(v-u)$

பொருளின்மீது செயற்படும் விசை மாறுபடுமாயின், தாக்கினைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

விசையின் மதிப்பு மாருமலிருக்கும் மிகச்சிறிய கால அளவை (δt) எடுத்துக் கொள்வோம். அச் சிறிய கால அளவில் தாக்கு $= F\,dt$

எனவே, t கால அளவில் தாக்கு $= \int_0^t F\,dt.$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி நுண்கணிதமுறையில்

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt}$$

எனவே, $$I = \int_0^t m\frac{dv}{dt}.dt = \int_0^t m\,dv$$

அல்லது, $I = m(v-u)$

எனவே, இரு வகைகளிலும் $I = m(v-u)$ 6.1

அதாவது தாக்கு = உந்தப்பாட்டில் ஏற்படும் மாறுதல்

எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவில் செயற்படும் ஒரு விசையின் தாக்கு, அக் கால அளவில் உந்தப்பாட்டில் ஏற்படும் மாறுதலால் அளவிடப்படுகிறது.

தாக்கு விசை

ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் விசையின் அளவை மீப்பெரு மதிப்புடையதாகவும், அது செயற்படும் கால அளவை மீச்சிறு மதிப்புடையதாகவும் செய்வதாகக் கொள்வோம். இவ் வகையில் விசை செயற்படக்கூடிய காலஅளவு மிக மிகச் சிறியதாயிருப்பதால் பொருள் பெறும் இடப் பெயர்ச்சி புறக்கணிக்கத்தக்க அளவுக்கு மிகச்சிறியதாயிருக்கும். எனவே, அத்தகைய மீப்பெருவிசையின் விளைவு, பொருளில் உந்தப்பாட்டில் ஏற்படும் மாறுதலால் அளவிடப்படுகிறது. அத்தகைய மீப்பெருவிசை தாக்குவிசை எனப்பெறும்.

தாக்குவிசை என்பது அது செயற்படும் கால அளவில் துகளின் நிலையில் ஏற்படும் மாறுதலானது, புறக்கணிக்கத்தக்க அளவுக்கு இருக்கும் வகையில், மீச்சிறு கால அளவிற்குச் செயற்படும் மீப்பெரு விசையாகும். அவ் விசையின் விளைவு முழுவதும் துகளின் உந்தப் பாட்டில் ஏற்படும் மாறுதலால் அளவிடப்படுகிறது.

உண்மையில் அத்தகைய ஒரு விசையை நாம் பெறமுடியாது. எனினும், சம்மட்டியால் கொடுக்கப்படும் அடி, கிரிக்கெட் பந்தின் மீது மட்டை கொடுக்கும் அடி முதலியவை அத்தகைய விசையினைப் பெரிதும் ஒத்திருக்கக்கூடிய எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

மீட்சியுறு பொருள்களின் மோதல் (Impact of elastic bodies)

ஒரு பந்தை மேலிருந்து கீழே போட்டால், அது துள்ளியெழுவதை நாம் பார்த்திருக்கிறோம். ஒரு கண்ணாடிப் பந்து, ஒரு தந்தப் பந்து, ஒரு காரீயப் பந்து ஆகியவற்றை ஒரே உயரத்திலிருந்து ஒரு பளிங்குத்தரைமீது போடுவோமானால் அவை வெவ்வேறு உயரங்களுக்குத் துள்ளியெழுவதைக் காணலாம். கண்ணாடிப் பந்து அதிகமான உயரத்திற்கும் காரீயப்பந்து மிகக்குறைவான உயரத்திற்கும் துள்ளியெழும். மேலும், கண்ணாடிப் பந்தையே முதலில் பளிங்குத் தரைமீதும் பின்னர் ஒரு மரப்பலகையின்மீதும் ஒரே உயரத்தில் இருந்து போடுவோமாயின், மரப்பலகையிலிருந்து பந்து துள்ளி

யெழும் உயரம் பளிங்குத் தரையிலுள்ளதைவிடக் குறைவாக இருக்கும். அப் பந்துகள் ஒரே உயரத்திலிருந்து போடப்படுவதால், அவை ஒரே வேகத்துடன் தரையை மோதும். ஆனால், அவை வெவ்வேறு உயரங்களுக்குத் துள்ளியெழுவதால், அவை தரையை விட்டு எழும் வேகங்கள் வெவ்வேறாக இருக்கும்.

பந்துகள் தரையை மோதும்போது அவை சற்றுஅழுத்தப்படுகின்றன. அவ்வாறு அழுத்தப்பட்ட பந்துகள் தங்களின் இயல்பான அளவை அல்லது உருவத்தை அடைய முயற்சி செய்யும்போது, தரையிலிருந்து துள்ளி எழுகின்றன. அவ்வாறு பொருள்களை அவற்றின் இயல்பான உருவத்தை அடையச்செய்யும் பண்பு மீட்சியியல் (elasticity) என அழைக்கப்படுகிறது.

இங்கு வழவழப்பான, மீட்சித்திறமுடைய இரு கோளங்களுக்கிடையே நிகழும் மோதலைப்பற்றியும், ஒரு கோளம் ஒரு நிலையான வழவழப்பான தளத்தில் மோதுதலைப்பற்றியும் பார்ப்போம்.

மோதலில், நேரடி மோதல் (direct impact, சாய்ந்த மோதல் (oblique impact) என இருவகை உண்டு. மோதலில் பங்குபெறும் இரு கோளங்களும் ஒவ்வொன்றின் இயக்கமும் அவை ஒன்றை யொன்று தொடும் புள்ளியில் உள்ள பொது லம்பத்தின் வழியே இருக்குமாயின், அவை நேரடியாக மோதிக் கொள்கின்றன என்று கூறப்படுகிறது. கோளங்களும் இரண்டின் இயக்கமோ அல்லது ஏதாவதொன்றின்இயக்கமோ பொது லம்பத்திற்குச் சாய்ந்ததிசையில் இருப்பின், நிகழும் மோதல் சாய்ந்தமோதல் oblique impact) எனப் படும்.

வழவழப்பான இரு கோளங்கள் மோதிக்கொள்ளும்போது, அவற்றிற்கிடையே செயற்படும் செயலெதிர்ச்செயல்கள் (mutual actions) அவை ஒன்றையொன்று தொடும் புள்ளியிலுள்ள பொது லம்பத்தின்வழியே செயற்படுகின்றன. கோளங்களைப் பொறுத்த வரை அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு பொது லம்பமாதலால், அந்தச் செயலெதிர்ச் செயல்கள் அக் கோட்டின் வழியேதான் செயற்படும்.

மோதலுக்கான விதிகள் : எல்லாவித மோதல்களும் கீழ்க் கண்ட விதிகளுக்கு உட்படும். அவையாவன :

1. மோதலில் பங்குபெறும் இரு பொருள்களின் பொது லம்பத்தின் வழியே மோதலுக்குமுன் உள்ளமொத்த உந்தம் மோதலுக்குப் பின் உள்ள மொத்த உந்தத்திற்குச் சமமாகும்.

2. பொது லம்பத்தின் வழியே மோதலுக்குப்பின் பொருள்களின் சார்புத்திசை வேகத்திற்கும் மோதலுக்கு முன் அவற்றின் சார்புத்திசை வேகத்திற்குமிடையே உள்ள தகவு மாறிலியாகவும் எதிர்க்குறியுடையதாகவும் உள்ளது; மாறிலியின் மதிப்பு பொருள்களின் நிறைகளையன்றி அவற்றின் மூலப்பொருள்களைமட்டுமே சார்ந்திருக்கிறது. அந்த மாறிலி நிலைமீட்சி எண் (coefficient of restitution) எனப்படும்; e என்னும் எழுத்தால் குறிக்கப்பெறும்.

பொதுலம்பத்தின் வழியே மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் திசைவேகங்கள் V_1 V_2 என்றும் மோதலுக்கு முன் அவை முறையே u_1, u_2 என்றும் கொள்வேமாயின்,

$$\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} = -e$$

அல்லது, $$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2)$$

e, வெவ்வேறு மூலப் பொருள்களுக்கும் வெவ்வேறு மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும் அதன் மதிப்பு இரு கண்ணாடிக் கோளங்களுக்கு 0·94, தந்தக் கோளங்களுக்கு 0·81, இரும்புக் கோளங்களுக்கு 0·66, காரீயக் கோளங்களுக்கு 0·20.

நிலைமீட்சி எண் சுழியாக உள்ள பொருள்கள் மீட்சியுறாப் பொருள்கள் (inelastic bodies) எனவும் நிலைமீட்சி எண் ஒருமமாக உள்ள பொருள்கள் நிறை மீட்சியையுடைய (perfectily elastic) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. கண்டிப்பாகப் பார்க்குமிடத்து இயற்கையில் மீட்சியுறாப் பொருள்களையோ, நிறை மீட்சியையுடைய பொருள்களையோ காண்பது அரிது. மிகக் கவனமாகச் செய்யப் பட்ட சோதனைகள் e-ன் மதிப்புப் பொருள்களின் மிகப் பெருதிசை வேகங்களுக்கு மாறிலியாயில்லாமல் சற்றுக் குறைகிறது எனப் புலப் படுத்தப்படுகின்றன. எனினும், இவ் விதியை ஒரு தோராய விதியாகக் கொள்ளலாம். இவ் விதி நியூட்டனின் சோதனையிலிருந்து அறியப்பட்டதால் இது நியூட்டனின் ஆய்நிலைவிதி (experimental law) எனப்படும். கோளங்கள் சாய்ந்த மோதலில் பங்குபெறும் போது, அவற்றின் சார்புத்திசை வேகங்களின் பொது லம்பத்தின் வழியேயுள்ள ஆக்கக் கூறுகளைக் கருத்திற் கொள்ளவேண்டும்.

நிலையான கிடைத்தளத்தின்மீது h_1 உயரத்திலிருந்து செங்குத்தாக விழும் ஒரு பொருள் h_2 உயரத்திற்குத் துள்ளி எழுமாயின் $e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$ என்று பின்வருமாறு நிறுவலாம் :

பொருள் தளத்தை அடையும்போது, அதன் திசைவேகம் u_1 எனவும், துள்ளியெழும்போது அதன் திசைவேகம் v_1 எனவும்

கொள்வோம். தளம் நிலையானதாதலால், $v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2)$ என்ற சமன்பாட்டில் $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ ஆகும். எனவே,

$$v_1 = -eu_1$$

$$\therefore \quad v_1^2 = e^2 u_1^2$$

அல்லது
$$\frac{v_1^2}{u_1^2} = e^2$$

மேலும்,
$$u_1^2 = 2gh_1$$
$$v_1^2 = 2gh_2$$

$$\therefore \quad \frac{v_1^2}{u_1^2} = \frac{h_2}{h_1} = e^2$$

$$\therefore \quad e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

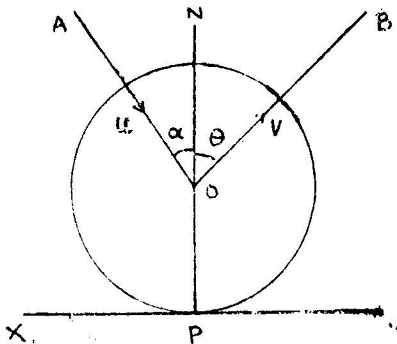
மேலும், ஒரு பொருள் நிலையான தளம் ஒன்றின்மீது அதற்கு நேர்குத்தான திசையில் u என்ற திசைவேகத்துடன் மோதி அதே திசையில் v என்ற திசைவேகத்துடன் துள்ளி எழுமாயின்,

$$e = \frac{v}{u}$$

ஆகும்.

3. மோதலில் பங்கு பெறும் கோளங்களின் பொதுத் தொடு கோட்டின் வழியே எவ்வித விசையும் செயற்படுவதில்லை.

எனவே, பொதுத் தொடுகோட்டின் வழியே உந்தத்தில் அதன் பயனுய்ப் பொருள்களின் திசைவேகங்களில் எவ்வித மாறுதலும் நிகழாது.



படம் 6·1

நிலையான தளத்தின்மீது மோதல்: m என்ற நிறையையும் e என்ற மீட்சி எண்ணையும் கொண்ட வழவழப்பான ஒரு கோளம் நிலையான தளம் ஒன்றின்மீது சாய்வாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் அதன் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 6·1 மோதலின் போது கோளத்தின் நிலையைக் காட்டுகிறது XY என்பது தளம்; O என்பது கோளமையம்

PON என்பது பொது லம்பம். கோளத்தின் திசைவேகம் மோதலுக்கு முன் AO என்ற திசையில் u எனவும், மோதலுக்குப்பின் OB என்ற திசையில் V எனவும் கொள்வோம். $\widehat{AON}=\alpha$, $\widehat{NOB}=\theta$ என இருக்கட்டும். u, v ஆகியவற்றைப் பொது லம்பத்திசையிலும் அதற்கு நேர்குத்தான திசையிலும் (X, Y) பிரிப்போமாயின்,

பொதுலம்பத்திசையில்,

V-ன் ஆக்கக் கூறு $=V\cos\theta$

u-ன் ஆக்கக் கூறு
u கீழ்நோக்கி இருப்பதால் $=-u\cos\alpha$

XY திசையில்,

v-ன் ஆக்கக் கூறு $=v\sin\theta$

u-ன் ஆக்கக் கூறு $=u\sin\alpha$

எனவே, தளம் நிலையாக இருப்பதால், நியூட்டனின் ஆய்நிலை விதிப்படி $v\cos\theta-O=-e(-u\cos\alpha-O)$

அதாவது $v\cos\theta=eu\cos\alpha$ 6.1

தளமும் கோளமும் வழவழப்பானதாகையால், பொதுத் தொடு கோட்டின், அதாவது தளத்திற்கு இணையான திசையில் திசை வேகங்களில் மாறுதல் ஏற்படாது.

$\therefore\ V\sin\theta=u\sin\alpha$ 6.2

சமன் 6·1, 6·2 ஆகியவற்றின் இருமடிகளைச் சேர்ப்போமாயின்,

$$V^2 = u^2(\sin^2\alpha+e^2\cos^2\alpha)$$

$$V = \sqrt{[u^2(\sin^2\alpha+e^2\cos^2\alpha)]} \quad \text{...........6 3.}$$

மேலும் $\frac{\text{சமன் 6.2}}{\text{சமன் 6.1}}=\tan\theta=\frac{1}{e}\tan\alpha$ 6.4

சமன் 6.3 மோதலுக்குப்பின் கோளத்தின் திசை வேகத்தின் எண் மதிப்பையும், சமன் 6.4 அதன் திசையையும் கொடுக்கின்றன.

சிறப்பு நேர்வுகள்:

1. $e=1$ என்றால் $\theta=\alpha$; $V=u$

அதாவது, கோளமும் நிலையான தளமும் நிறை மீட்சியுடையனவாக இருப்பின் கோளத்தின் திசை வேகத்தின் எண் மதிப்பு மாறாது. மேலும், மோதலுக்கு முன்னும் பின்னும் கோளத்தின் திசைகள் பொது லம்பத்திற்குச் சம அளவில் சாய்ந்திருக்கும்.

2. $e = O$ என்றால் $\theta = 90°$; $v = u \sin \alpha$

கோளமும் தளமும் மீட்சியுறுதனவாக இருப்பின், மோதலுக்குப் பின் கோளம் தளத்தின் வழியே $u \sin \alpha$ என்னும் திசை வேகத்துடன் செல்லும்.

3. $\alpha = O$ என்றால் $\theta = O$; $v = eu$

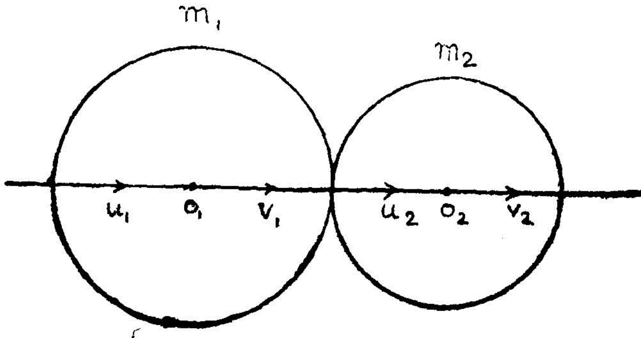
அதாவது கோளம் தளத்தின்மீது நேரடியாக மோதுமாயின், அது பொது லம்பத்தின் வழியே eu என்னும் திசைவேகத்துடன் துள்ளியெழும்.

தளம் கோளத்தின்மீது செயற்படுத்தும் தாக்கு : தளம் கோளத்தின்மீது செயற்படுத்தும் தாக்கு (I) பொது லம்பத்தின் வழியே கோளத்தின் உந்த மாறுதலால் அளவிடப்படும்.

எனவே
$$I = mv\cos\theta - (-mu\cos\alpha)$$
$$= m(v\cos\theta + u\cos\alpha)$$
$$= m(eu\cos\alpha + u\cos\alpha)$$
$$I = mu\cos\alpha\,(1+e) \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6.6$$

கோளம் தளத்தின்மீது, செயற்படுத்தும் தாக்கு தளம் கோளத்தின்மீது செயற்படுத்தும் தாக்குக்கு எதிராகவும் சமமாகவும் இருக்கும்.

இரு கோணங்களின் நேரடி மோதல் : m_1 என்ற நிறையையும் u_1 என்ற திசை வேகத்தையும் கொண்ட ஒரு கோளம் அதே



படம் 6·2

திசையில் u_2 என்ற திசை வேகத்தையும் m_2 என்ற நிறையையும் கொண்ட மற்றொரு கோளத்துடன் மோதுகிறது. அவற்றின் நிலை

மீட்சி எண் e என்றால் மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் திசை வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

படம் 6.2-ல் O_1, O_2 என்பன கோளங்களின் மையங்களைக் குறிக்கின்றன.

மோதலுக்குப்பின் கோளங்களின் திசை வேகங்கள் அவற்றின் பொது லம்பத்தின் வழியே v_1, v_2 எனக் கொள்வோம்.

உந்தம் அழியாமை விதிப்படி,

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 6.7$$

நியூட்டனின் ஆய்நிலை விதிப்படி,

$$v_1-v_2 = -e(u_1-u_2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 6.8$$

சமன் 6.8-ஐ m_2-ஆல் பெருக்கி, சமன் 6.7-உடன் சேர்ப்போமாயின், $v_1(m_1+m_2) = m_2u_2(1+e)+u_1(m_1-em_2)$

எனவே,
$$v_1 = \frac{m_2u_2(1+e)+u_1(m_1-em_2)}{m_1+m_2} \qquad \ldots 6.9$$

சமன் 6·8-ஐ m_1 – ஆல் பெருக்கி, சமன் 6.7-லிருந்து கழிக்க

$$v_2(m_1+m_2) = m_1u_1(1+e)+u_2(m_2-em_1)$$

எனவே,
$$v_2 = \frac{m_1u_1(1+e)+u_2(m_2-em_1)}{m_1+m_2} \qquad \ldots 6.10$$

சிறப்பு நேர்வு :

$e=1$, $m_1=m_2$ என்றால் $v_1=u_2$; $v_2=u_1$

அதாவது, கோளங்கள் இரண்டும் நிறை மீட்சியுடையனவாகவும் சம நிறையுடையனவாகவும் இருப்பின், மோதலின்போது அவற்றின் திசை வேகங்களைப் பரிமாறிக்கொள்கின்றன.

கோளங்கள் ஒன்றின்மீதொன்று செயற்படுத்தும் தாக்கு

m_1 என்ற நிறையையுடைய கோளத்தின்மீது செயற்படும் தாக்கு (I_1) அதன் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டால் அளவிடப்படுகிறது.

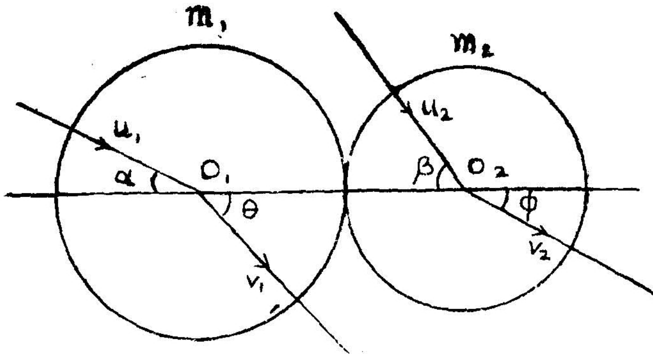
எனவே, $$I_1 = m_1(u_1 - v_1)$$
$$= \frac{m_1 m_2(1+e)(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}$$

m_2 என்ற நிறையையுடைய கோளத்தின்மீது செயற்படும் தாக்கு, m_1-ன்மீது செயற்படும் தாக்குக்குச் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.

அதாவது $$I_2 = \frac{m_1 m_2(1+e)(u_2 - u_1)}{m_1 + m_2}$$

இரு கோளங்களுக்கிடையே சாய்ந்த மோதல் : m_1 என்ற நிறையையும் u_1 என்ற திசைவேகத்தையும்கொண்ட ஒரு கோளம் m_2 என்ற நிறையையும் u_2 என்ற திசை வேகத்தையும் கொண்ட மற்றொரு கோளத்துடன் சாய்வாக மோதுகிறது. கோளங்களின் இயக்கத் திசைகள் பொது லம்பத்துடன் α, β என்ற கோணங்களை அமைக்குமாயின், மோதலுக்குப்பின் கோளங்களின் திசை வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

படம் 6.3-ல், O_1, O_2 என்பன மோதலின்போது கோளங்களின் மையங்களைக் குறிக்கின்றன. மோதலுக்குப்பின் கோளங்



படம் 6·3

களின் திசை வேகங்கள் பொதுலம்பத்துடன் முறையே θ, ϕ என்ற கோணங்களை அமைக்கும் திசைகளில், v_1, v_2 எனக்கொள்வோம்.

உந்தம் அழியாமை விதிப்படி

$$m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2 \cos\phi = m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta \quad \ldots 6.11$$

நியூட்டனின் ஆய்நிலை விதிப்படி

$$v_1 \cos\theta - v_2 \cos\phi = -e(u_1 \cos\alpha - u_2 \cos\beta) \quad \ldots \quad \ldots 6.12$$

கோளங்கள் வழவழப்பானவையாதலால், அவற்றின் பொது லம்பத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையில் உள்ள வேகங்களில் மாறுதல் ஏற்படாது.

எனவே, $v_1 \sin\theta = u_1 \sin\alpha$ 6.13

$v_2 \sin\phi = u_2 \sin\beta$ 6.14

சமன்பாடு 6·12-ஐ m_2-ஆல் பெருக்கிச் சமன் 6·11 உடன் சேர்ப்போமாயின்,

$$v_1 \cos\theta = \frac{(m_1 - em_2)\, u_1 \cos\alpha + m_2 (1+e)\, u_2 \cos\beta}{m_1 + m_2} \quad \ldots \ldots \; 6{\cdot}15$$

சமன்பாடு 6·12-ஐ m_1 ஆல் பெருக்கிச் சமன் 6·11-லிருந்து கழிப்போமாயின்,

$$v_2 \cos\phi = \frac{(m_2 - em_1)\, u_2 \cos\beta + m_1 (1+e)\, u_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2} \quad \ldots \; 6{\cdot}16$$

சமன்பாடுகள் 6·13, 6·15 ஆகியவற்றின் இருமடிகளைச் சேர்ப்போமாயின், $v_1{}^2$-ன் மதிப்பையும் சமன்பாடு 6·18-ஐ, 6·15ஆல் வகுக்க tan θ-ன் மதிப்பையும் பெறலாம். அவ்வாறே சமன்பாடுகள் 6·14, 6·16 ஆகியவற்றிலிருந்து $v_2{}^2$-ன் மதிப்பையும் tanφ-ன் மதிப்பையும் பெறலாம்.

எனவே, சமன்பாடுகள் 6·13, 6·14, 6·15, 6·16 ஆகியவற்றிலிருந்து v_1, v_2, θ, ϕ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

சிறப்பு நேர்வுகள் :

1. $e = 1$, $m_1 = m_2$ என்றால், $v_1 \cos\theta = u_2 \cos\beta$; $v_2 \cos\phi = u_1 \cos\alpha$;

அதாவது இரு கோளங்களும் சம நிறையுடையனவாகவும் நிறை நெகிழ்வுறுவனவாகவும் இருப்பின், மோதலின்போது அவற்றின் பொது லம்பத்தின் வழியே உள்ள திசைவேகங்களைப் பரிமாறிக்கொள்கின்றன.

2. $u_2 = 0$ என்றால், சமன் 6·14-லிருந்து $\phi = 0$ ஆகும்.

அதாவது, இரண்டாவது கோளம் தொடக்கத்தில் ஓய்விலிருந்தால், மோதலுக்குப்பின் அது பொது லம்பத்திசை வழியே செல்லும்.

கோளங்கள் ஒன்றின்மீது ஒன்று செயற்படுத்தும் தாக்கு :

முதற்கோணத்தின்மீது செயற்படும் தாக்கு (I_1) =

லம்பத்திசை வழியே அதன் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதல்

$$I_1 = m_1 (u_1 \cos \alpha - v_1 \cos \theta)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1+e)(u_1 \cos \alpha - u_2 \cos \beta)$$

இரண்டாவது கோளத்தின்மீது செயற்படும் தாக்கு

$$I_2 = -I_1$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1+e)(u_2 \cos \beta - u_1 \cos \alpha)$$

மோதலின்போது ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு :

1. நேரடி மோதல்

உந்தம் அழியாமை விதிப்படி,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad [\text{சமன் } 6{\cdot}7]$$

நியூட்டனின் ஆய்நிலை விதிப்படி,

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2) \qquad [\text{சமன் } 6{\cdot}8]$$

சமன் 6·8-ன் இருமடியை $m_1 m_2$-ஆல் பெருக்கிச் சமன் 6·7-உடன் சேர்ப்போமாயின்,

$$v_1^2(m_1^2 + m_1 m_2) + v_2^2(m_2^2 + m_1 m_2) = (m_1 u_1 + m_2 u_2)^2 + e^2 m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2$$

$$\therefore \quad m_1 v_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 v_2^2 (m_1 + m_2) = m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 + m_1 m_2 (u_1^2 - u_2^2) + e^2 m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 - m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2$$

$$\therefore \quad (m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = (m_1 + m_2)(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) - m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 (1 - e^2)$$

எனவே, $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2 (1 - e^2).$

மோதலுக்குப்பின் மொத்த இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

மோதலுக்கு முன் மொத்த இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$

எனவே, நேரடி மோதலில் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)^2(1-e^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \; 6{\cdot}17.$$

2. சாய்ந்த மோதல்

நேரடி மோதலுக்கான அதே வழியைப் பின்பற்றிச் சமன்பாடுகள் 6·11, 6·12-லிருந்து பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}m_2v_2^2\cos^2\phi=\frac{1}{2}m_1u_1^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}m_2u_2^2\cos^2\beta-\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)(u_1\cos\alpha-u_2\cos\beta)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \; 6{\cdot}18.$$

மேலும், $v_1 \sin\theta = u_1 \sin\alpha$; $v_2 \sin\phi = u_2 \sin\beta$

[சமன் 6·13, 6·14]

ஆதலால்,

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}m_2v_2^2\sin^2\phi=\frac{1}{2}m_1u_1^2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}m_2u_2^2\sin^2\beta \quad \ldots \quad \ldots \quad 6{\cdot}19$$

சமன்பாடுகள் 6·18, 6·19 ஆகியவற்றைச் சேர்ப்போமாயின்,

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+m_2u_2^2-\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)(u_1\cos\alpha-u_2\cos\beta)^2$$

எனவே, சாய்ந்த மோத ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)(u_1\cdot\cos\alpha-u_2\cos\beta)^2 \ldots \ldots \; 6{\cdot}20$$

நிலைமீட்சி எண்ணின் மதிப்பு ஒருமமில்லையெனில், எவ் வகை மோதலிலும் ஓரளவு இயக்க ஆற்றல் இழக்கப்படுகிறது என்பதைச் சமன்பாடுகள் 6·16, 6·20 ஆகியவற்றிலிருந்து காணலாம்.

மீட்சியுறு பொருள்களுக்கிடையே மோதலின்போது நிகழும் செயல் விளைவு : இரண்டு மீட்சியுறு பொருள்கள் மோதும்போது மோதல் நிகழக்கூடிய கால அளவை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். முதற் பகுதியில் கோளங்கள் ஒன்றையொன்று அழுத்துகின்றன; இரண்டாவது பகுதியில் அவற்றின் உருவங்களை மீண்டும் பெறுகின்றன.

மோதலின் முதற்பகுதி பொருள்கள் இரண்டும் திடீரென்று ஒரே திசை வேகத்துடன் இயங்கும்வரை நிகழ்கிறது. அதன் பின்னர்ப் பொருள்கள் அவற்றின் உருவங்களை மீண்டும் பெறச் செய்வதற்கான விசைகள் செயற்படுகின்றன. மோதலின் முதற் பகுதியில் பொருள்

களுக்கிடையே செயற்படும் செயலெதிர்ச் செயல் அமுக்கு விசை என்றும், இரண்டாவது பகுதியில் செயற்படும் செயலெதிர்ச் செயல் நிலைமீட்சி விசை என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

நியூட்டனின் மூன்றாவது விதிப்படி, மோதலின்போது ஒவ்வொரு கணத்திலும் பொருள்கள் ஒன்றின்மீதொன்று செயற்படுத்தும் விசைகள் சமமாகவும் எதிர்த் திசைகளிலும் அமையவேண்டும். எனவே, பொருள்களின்மீது செயற்படும் தாக்குகளும் சமமாகவும் எதிர்த் திசைகளிலும் அமையவேண்டும்.

நிலைமீட்சி விசை, அமுக்கு விசை ஆகியவற்றின் தாக்குகளுக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் e-க்குச் சமமம் என நிறுவலாம்.

மோதலின் முதற்பகுதியின் முடிவில் பொருள்களின் பொதுவான திசை வேகம் U எனக் கொள்வோம். எனவே, அந்தக் கணத்தில்,

முதற்பொருளின் உந்த இழப்பு $= m_1(u_1-U)$

இரண்டாவது பொருளின் உந்த மிகுதி $= m_2(U-u_2)$

அமுக்கு விசையின் தாக்கு I_1 எனில்,

$$I_1 = m_1(u_1-U) = m_2(U-u_2)$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{m_1}+\frac{I_1}{m_2}=u_1-U+U-u_2=u_1-u_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 6{\cdot}21$$

மேலும், மோதலின் இரண்டாவது பகுதியின் போது

முதற் பொருளின் உந்த இழப்பு $= m_1(U-v_1)$

இரண்டாவது பொருளின் உந்த மிகுதி $= m_2(v_2-U)$

எனவே, நிலைமீட்சி விசையின் தாக்கு I_2 எனின்

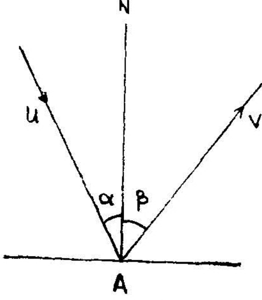
$$\frac{I_2}{m_1}+\frac{I_2}{m_2}=v_2-v_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 6.22$$

$\therefore$ சமன் 6·21, 6·22-லிருந்து,

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=-\frac{v_1-v_2}{u_1-u_2}=e$$

சொரசொரப்பான நிலையான தளத்தின்மீது மோதல்: நிலையான சொரசொரப்பான தளத்தின்மீது ஒரு பொருள் சாய்வாக மோதுவதாகக் கொள்வோம். பொருளின் திசை வேகங்கள் மோதலுக்கு முன் பொருள் தளத்தைத் தொடுமிடத்தில் உள்ள பொது லம்பத்துடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் u எனவும்

மோதலுக்குப்பின் லம்பத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் v எனவுக் கொள்வோம். [படம் 6·4], உராய்வு எண் μ என இருக்கட்டும்.



படம் 6·4

இங்குப் பொதுத் தொடுகோட்டுத் திசையில் உராய்வு விசை செயற்படுவதால், அத் திசையில் பொருள்களின் திசை வேகங்களில் அதன் பயனுய் உந்தங்களில் மாறுதல் ஏற்படும்.

பொதுத் தொடுகோட்டுத் திசையில் செயற்படும் விசை, லம்ப எதிர்விசையைப்போல் μ மடங்கானதால் பொதுத் தொடு கோட்டுத் திசையில் தாக்கு லம்பத்திசையில் தாக்கிணைப் போல் μ மடங்காகும்.

∴ பொதுத் தொடுகோட்டுத் திசையில் தாக்கு,

$$m(u \sin \alpha + v \sin \theta) = \mu m (u \cos \alpha + v \cos \theta)$$

$$\therefore \quad v(\sin \theta + \mu \cos \theta) = u(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad \dots \quad \dots \quad 6{\cdot}23$$

நியூட்டனின் ஆய்நிலை விதிப்படி,

$$v \cos \theta = eu \cos \alpha \quad \dots \quad \dots \quad 6{\cdot}24$$

சமன் 6·23-ஐ 6·24-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{e \cos \alpha}$$

எனவே, $\tan \theta = \frac{1}{e}[\tan \alpha - \mu(1+e)]$ ... 6·25

சமன்பாடு 6·25-லிருந்து கிடைக்கும் θ-ன் மதிப்பைச் சமன் 6·23-ல் பதிலீடு செய்து v-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. 3 டன்கள் நிறையுள்ள முளையடிப்பான் (pile driver) ஒன்று 1 டன் நிறையுள்ள முளையொன்றின்மீது 16 அடி உயரத்திலிருந்து விழுகிறது. முளை தரையினுள் 2 அங். ஆழம் செலுத்தப்படுமாயின், தரையின் தடை சீரானதெனக் கருதி அதன் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

முளையடிப்பான் முளையைத் தொடும் சற்று முன்னர் அதன் திசை வேகம், சமன் 2·14ன் படி.

$$v = \sqrt{2 \times 32 \times 16}$$
$$= 32 \text{ அடி/வி.}$$

மோதலுக்கு முன் மொத்த உந்தம் $= 3 \times 2240 \times 32$ பவு.—அடி/வி.

மோதலுக்குப்பின் முளையடிப்பான், முளை ஆகிய இரண்டும் ஒன்றாக நகருவதால், இயக்கத்தில் பங்குகொள்ளும் மொத்த நிறை 4 டன்கள். அவற்றின் பொதுவான திசைவேகம் v எனக் கொள்வோம்.

மோதலுக்குப்பின் மொத்த உந்தம் $= 4 \times 2240 \times v$ பவு—அடி/வி.
உந்தம் அழியாமை விதிப்படி.

$$4 \times 2240 \times v = 3 \times 2240 \times 32$$

$$v = 24 \text{ அடி/வி.}$$

முளையானது முளையடிப்பானுடன் சேர்ந்து 2 அங். செல்வதால், இந்தத் திசைவேகம் 2 அங். தொலைவில் சுழியாகிறது. எனவே, முளையின் எதிர் முடுக்கம் a எனின் சமன் 2·14 ன் படி,

$$a = \frac{24 \times 24 \times 6}{2} \text{ அடி/வி}^2.$$

$$= 1728 \text{ அடி/வி.}^2$$

$\therefore$ இந்த எதிர் முடுக்கத்தைக் கொடுக்கும் விசை

$$= m \times a$$

$$= 4 \times 2240 \times 1728 \text{ பவுண்டல்கள்}$$

$$= 280 \times 1728 \text{ பவு-எடைகள்}$$

தரையினால் கொடுக்கப்படும் தடை R என்றால் எதிர் முடுக்கம் கொடுக்கக்கூடிய விசை $= R -$ இயக்கத்தில் பங்கு கொள்ளும் மொத்த எடை

$$\therefore \quad (R - 4 \times 2240) = 280 \times 1728$$

$$\therefore \quad R = 4 \times 2240 + 280 \times 1728$$

அதாவது, $R = 220$ டன்கள் எடை.

மாதிரிக் கணக்கு 2. 1 பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு குண்டு 9 பவு. நிறையுள்ள ஒரு நிலையான கட்டையை 10 அங்குலம் ஊடுருவுகிறது. அக் கட்டை நகரக் கூடியதாயும் அது குண்டின் இயக்கத்திற்கு விளைவிக்கும் தடை சீரானதாகவுமிருப்பின், அதே வேகத்துடன் செலுத்தப்படும் குண்டு கட்டையை எவ்வளவு தூரம் ஊடுருவும்?

குண்டின் திசைவேகம் v எனவும் கட்டை செயற்படுத்தும் தடை F எனவும் கொள்வோம்.

கட்டை நிலையாயிருக்கும்போது :

குண்டு கட்டையை 10 அங். ஊடுருவி ஓய்வுபெறுவதால், மறையும் அதன் இயக்க ஆற்றல் கட்டையை ஊடுருவுவதில் F-ஐ எதிர்த்து வேலை செய்யப்பயன்படுகிறது. எனவே,

$$\frac{1}{2} mv^2 = F \times \frac{10}{12}$$

அல்லது $F = \frac{3}{5} v^2$ ... ... (i)

கட்டை அசையக் கூடியதாயிருக்கும்போது:

குண்டு கட்டையுடன் மோதியபின் அவற்றின் பொதுவான திசைவேகம் V எனக் கொள்வோம்.

உந்தம் அழியாமை விதிப்படி,

$$1 \times v = (1+9) V$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{10} v$$

∴ மோதலுக்குப்பின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} (1+9) V^2$$

$$= 5 \times \frac{v^2}{100}$$

$$= \frac{v^2}{20}$$

எனவே, இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு

$$= \frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{20}$$

$$= \frac{9}{20} v^2$$

இப்பொழுது குண்டு கட்டையை x அங். ஊடுருவுவதாகக் கொள்வோமாயின்,

ஆற்றல் இழப்பு = குண்டு கட்டையை x அங். ஊடுருவுவதில் செய்யப்படும் வேலை

அதாவது, $\frac{9}{20} v^2 = F \frac{x}{12}$

அல்லது $F = \frac{12 \times 9}{20\ x} v^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

சமன் பாடுகள் (i), (ii)-லிருந்து

$$\frac{3}{5} v^2 = \frac{12 \times 9}{20\ x} v^2$$

$$x = \frac{12 \times 9 \times 5}{20 \times 3} = 9 \text{ அங்குலம்.}$$

எனவே, கட்டை நகரக்கூடியதாயிருக்கும்போது, குண்டு அதனை 9 அங். ஊடுருவும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3. கப்பி ஒன்றின்மீது செலுத்தப்பட்ட ஒரு கயிற்ருல் இணைக்கப்பட்ட 17 பவு, 15 பவு ஆகிய இரு நிறைகள் 16 அடி/வி. திசை வேகத்துடன் இயங்குகின்றன. 17 பவு நிறை திடீரென்று நிறுத்தப்பட்டு, மீண்டும் விடப்படுமாயின் கயிறு அரை விநடிக்குப் பின் இறுகும் என நிறுவுக.

17 பவு. நிறை திடீரென்று நிறுத்தப்படும்போது அதன் திசை வேகம் சுழியாகும். மேல்நோக்கி இயங்கும் 15 பவு. நிறை புவியீர்ப்பு முடுக்கத்திற்கு (g) உட்படும். எனவே, கயிறு தளர்ச்சியடையும். அதே சமயத்தில் 17 பவு. நிறை மீண்டும் விடப்படுவதால், கீழ் நோக்கி ஓய்விலிருந்து g-க்குச் சமமான முடுக்கத்துடன் இயங்கும். t விநடிகளின் இறுதியில் கயிறு இறுகுகிறது என்ருல், t விநடிகளில் இரு முறைகளும் கடந்த தொலைவுகள் சமமாகும்.

17 பவு. நிறை கீழ்நோக்கிக் கடந்த தொலைவு சமன் 2·13-ன் படி

$$= \tfrac{1}{2} \times 32 \times t^2 = 16t^2$$

15 பவு. நிறை மேல்நோக்கிக் கடந்த தொலைவு

$$= 16t - \tfrac{1}{2} \times 32 \times t^2$$

$$= 16t - 16t^2$$

$$\therefore\ 16t^2 = 16t - 16t^2$$

$$32t = 16$$

$$t = \frac{16}{32} = \tfrac{1}{2} \text{ விநடி}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4: எடைமிக்க நெகிழ்வுறுபொருள் ஒன்று ஓர் அறையின் கூரையிலிருந்து விழுகிறது. இருமுறை துள்ளியெழுந்த பிறகு, அறையின் உயரத்தில் $\frac{1}{16}$ உயரத்தை அடைகிறது. நிலைமீட்சி எண்ணைக் கணக்கிடுக.

அறையின் கூறை h உயரத்தில் இருப்பதாகவும் பொருள் அறையின் தளத்தையடையும்போது, அதன் திசைவேகம் v எனவும் நிலை மீட்சி எண் e எனவும் கொள்வோம். பொருள் முதல் முறை துள்ளியெழும்பொழுது, அதன் வேகம் e v ஆகும். இரண்டாவது முறை அது துள்ளியெழும்பொழுது, அதன் வேகம் e^2v ஆகும்.

எனவே, பொருள் இரண்டாவது முறை துள்ளியெழும் உயரம் சமன் 2·14ன் படி $0 = (e^2v)^2 - 2g\frac{1}{16}h$

அல்லது $h = \frac{8e^4v^2}{g}$

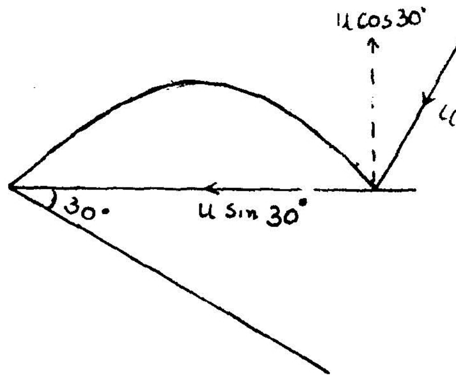
ஆனால், $v^2 = 2gh$

$\therefore \quad h = \frac{8e^4 \, 2gh}{g}$

$\therefore \quad e^4 = \frac{1}{16}$

$e = \frac{1}{2}$

மாதிரிக் கணக்கு 5. கிடைத்தளத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் ஒரு சாய்தளத்தின்மீது பந்து ஒன்று 16 அடி உயரத்திலிருந்து செங்குத்தாக விழுகிறது. நிலை மீட்சி எண் $\frac{1}{2}$ என்றால், மோதலுக்குப் பிறகு அதன் திசைவேகத்தைக் கணக்கிடுக.



படம் 6·5

சாய்தளத்தின்மீது பந்து மோதும்போது அதன் திசைவேகம் u எனில் சமன் 2·14-ன் படி

$$u = \sqrt{2 \times 32 \times 16}$$
$$= 32 \text{ அடி/வி.}$$

மோதலுக்குப்பின் அதன் திசைவேகம் பொது லம்பத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் v எனக் கொள்வோம்.

இனி, நியூட்டனின் ஆய்நிலை விதிப்படி

$$v \cos \theta = e\, u \cos \alpha$$
$$= \frac{1}{3} \times 32 \times \cos 30$$

$$v \cos \theta = \frac{16}{\sqrt{3}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

மேலும், தளத்திற்கு இணையான திசையில் திசை வேகமாறுபாடுகள் ஏற்படாதாகையால்,

$$v \sin \theta = u \sin \alpha$$
$$= 32 \sin 30$$
$$v \sin \theta = 16 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii)-லிருந்து

$$v^2 = \frac{256}{3} + 256$$
$$= \frac{1024}{3}$$

அல்லது $v = 18{\cdot}48$ அடி/வி.

மேலும், $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

அல்லது $\theta = 30^\circ$

எனவே, மோதலுக்குப்பிறகு பந்து கிடைமட்டத்தில் 18·48 அடி/வி. வேகத்துடன் செல்லும்.

மாதிரிக் கணக்கு 6. வழவழப்பான நிலையான தளத்தின்மீது ஒரு பந்து தளத்துடன் 30° கோணத்தில் மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் அதன் இயக்க ஆற்றல் மோதலுக்குமுன் உள்ளதைப் போல் பாதியளவே இருக்குமாயின் நிலைமீட்சி எண்ணையும் பந்து துள்ளியெழும் திசையையும் கணக்கிடுக.

மோதலுக்குமுன் பொருளின் திசைவேகம் u-எனவும் மோதலுக்குப் பின் பொதுலம்பத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் v எனவும் கொள்வோம். நிலை மீட்சி எண் e என இருக்கட்டும்

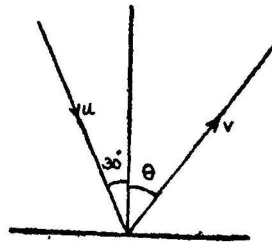
நியூட்டனின் ஆய்நிலை விதிப்படி,

$$v \cos \theta = e u \cos 30$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} e u$$

மேலும், $v \sin \theta = u \sin 30 = \frac{1}{2} u$

$$v^2 \therefore = \frac{3}{4} e^2 u^2 + \frac{u^2}{4}$$



படம் 6·6

$$v^2 = \frac{u^2}{4} (1 + 3e^2$$

பந்தின் இயக்க ஆற்றல்கள் மோதலுக்கு முன்னும் பின்னும் முறையே E_1, E_2 என்றால்,

$$E_2 = \frac{1}{2} E_1$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} mu^2$$

$$\therefore \frac{1}{2} m \frac{u^2}{4} (1 + 3e^2) = \frac{1}{4} mu^2$$

$$1 + 3e^2 = 2$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

மேலும் $\tan \theta = \frac{1}{2 e \cos 30}$

$$= \frac{1 \times \sqrt{3} \times 2}{2 \times \sqrt{3}}$$

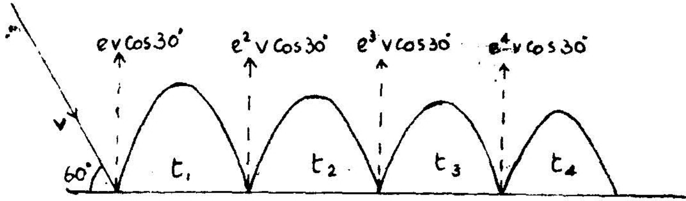
$$= 1$$

$$\therefore \theta = 45°$$

நிலைமீட்சி எண் $\frac{1}{\sqrt{3}}$. பந்து கிடைத்தளத்திற்கு 45° கோணத்தில் துள்ளி எழும்.

மாதிரி கணக்கு 7 : வழவழப்பான பந்து ஒன்று நீண்டு விரிந்த வழவழப்பான கிடைத்தளப் பரப்பின்மீது கிடைத்தளத்திற்கு 60° கோணத்தில் 128 அடி/வி. திசை வேகத்துடன் மோதுகிறது. நிலை மீட்சி எண் $\frac{1}{2}$ என்றால், தளத்தின்மீது முதல் மோதலுக்கும் 5ஆவது மோதலுக்குமுள்ள இடப்பெயர்ச்சியைக் கணக்கிடுக.

தளத்தின்மீது பந்து முதலில் A என்ற புள்ளியிலும் அடுத்து B, C, D, E என்ற புள்ளிகளிலும் மோதுவதாகக் கொள்வோம். பந்து அடுத்தடுத்த மோதல்களுக்கிடையே பரவளைவுப் பாதைகளில் செல்லும் [படம் 6·7].



படம் 6·7

பந்து A-ல் மோதும்போது அதன் திசை வேகம் பொதுலம்பத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் v எனக் கொள்வோம். பொதுலம்பத்தின்வழியே இத் திசை வேகத்தின் ஆக்கக் கூறு $v \cos \theta$. தளத்தின்வழியே ஆக்கக் கூறு $v \sin \theta$. நிலை மீட்சி எண் e எனில் A-ல் மோதலுக்குப்பின் லம்பத் திசையில் ஆக்கக் கூறு $ev \cos \theta$.

B-ல் மோதலுக்குப்பின் லம்பத் திசையில் ஆக்கக் கூறு $e^2 v \cos \theta$.

C-ல் மோதலுக்குப்பின் லம்பத் திசையில் ஆக்கக் கூறு $e^3 v \cos \theta$.

D-ல் மோதலுக்குப்பின் லம்பத் திசையில் ஆக்கக் கூறு $e^4 v \cos \theta$.

ஒவ்வொரு மோதலின்போதும் தளத்திற்கு நேர்குத்தான திசையில், அதாவது செங்குத்தான திசையில் பந்தின் இடப்பெயர்ச்சி சுழியாதலால், சமன் 2·13ன் படி.

A-லிருந்து B-க்குச் செல்வதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $(t_1) = \dfrac{2\, ev \cos \theta}{g}$

B-லிருந்து C-க்கு செல்வதற்குரிய நேரம் $t_2 = \dfrac{2e^2 v \cos \theta}{g}$

C-லிருந்து D-க்குச் செல்வதற்குரிய நேரம் $t_3 = \dfrac{2e^3 v \cos \theta}{g}$

D-லிருந்து E-க்குச் செல்வதற்குரிய நேரம் $t_4 = \dfrac{2e^4 v \cos \theta}{g}$

எனவே, தளத்தின்மீது முதல் மோதலுக்கும் 5ஆவது மோதலுக்கும் இடையே எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $T = t_1+t_2+t_3+t_4$

$$= \frac{2ev \cos\theta}{g}(1+e+ \quad)$$

இந்தக் கால இடைவெளியில் தளத்திற்கு இணையாக அதாவது கிடைமட்டத்தில் பந்தின் திசை வேகம் $v \sin\theta$ மாறாமலிருக்குமாதலால், பந்து கிடைத்தளத்தில் பெறும் இடப் பெயர்ச்சி

$$S = T \times v \sin\theta$$

$$= \frac{2e\,v^2 \cos\theta \sin\theta}{g}(1+e+e^2+e^3)$$

இந்தக் கணக்கில் $e = \frac{1}{2}$ $v = 128$ அடி/வி. $\theta = 30$

$$\therefore \quad S = 2 \times \tfrac{1}{2} \times \frac{128^2}{32} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8})$$

$$= 240\sqrt{3} \text{ அடி}$$

எனவே முதல் மோதலுக்கும் 5-வது மோதலுக்கும் உள்ள தொலைவு $= 240\sqrt{3}$ அடி.

பயிற்சி VI

1. அரை டன் எடையுள்ள மீட்சியுறாத செங்குத்தான முளை ஒன்று, 5 அடி உயரத்திலிருந்து விழும் 2 டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு சுத்தியால் 30 முறை அடிக்கப்பட்டுத் தரையினுள் 2 அடி இறக்கப் படுகிறது. தரையின் சீரானதெனக் கருதப்படும். தடை, $122\frac{1}{2}$ டன்கள் எடை என நிறுவுக.

2. 20 அடி/வி. திசை வேகத்துடன் இயங்கும் 2 பவு. நிறையுள்ள ஒரு சுத்தி 1 அவு. நிறையுள்ள ஓர் ஆணியை நிலையான மரக்கட்டையினுள் ஓர் அங்குல தூரம் செலுத்துகிறது. மோதலுக்குச் சற்றுப் பின்னர் ஆணி, சுத்தி ஆகியவற்றின் பொதுத் திசை வேகம், ஆற்றலிழப்பு சதவீதம், ஆணி இயங்கிய நேரம், கட்டை செயற்படுத்தும் சீரான எதிர் விசை ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

[19·4 அடி/வி., $3\frac{1}{33}$%, $\frac{1}{1280}$ வி., $145\frac{5}{11}$ பவு. எடை]

3. பின்னசைவு பெறக்கூடிய M நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து m நிறையுள்ள ஒரு குண்டு சுடப்பட்டது. அவற்றின் சார்புத் திசை வேகம் v என்றால், ஒவ்வொன்றின் திசை வேகத்தையும் கணக்கிடுக. விளைவிக்கப்பட்ட இயக்க ஆற்றல்,

$$\frac{1}{2}\,\frac{M\,m\,v^2}{M+m}$$

என நிறுவுக.

4. உராய்வற்ற கப்பி ஒன்றின்மீது செல்லும் ஒரு கயிற்றின் முனைகளில் 15 பவு, 5 பவு அளவுள்ள இரு நிறைகள் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளன. முதல் நிறை தரைமட்டத்தில் அமைந்து அவ் விரு நிறைகளும் ஓய்வில் உள்ளன. 5 பவு. அளவுள்ள மூன்ருவது நிறை ஒன்று 20 அடி உயரத்திலிருந்து விழுந்து இரண்டாவது நிறையுடன் மோதி அதனுடன் ஒன்றி நிறைகளை இயக்குவிக்கிறது. முதல் நிறை 4 அடி உயரம் எழும் என்று நிறுவுக.

5. 15 அவு., 17 அவு. அளவுள்ள நிறைகள் உராய்வற்ற ஒரு கப்பியின்மீது செல்லும் மெல்லிய கயிற்றினுல் இணைக்கப்பட்டு, ஓய்விலிருந்து புறப்படும்படி செய்யப்படுகின்றன. ஒரு விளுடி முடிவில் சிறிய நிறை ஓய்விலிருக்கும் 2 அவு. நிறை ஒன்றைத் தன்னுடன் எடுத்துச் செல்லுகிறது. 2 விளுடிகளின் இறுதியில் அந்த 2 அவு. நிறை கீழே விழுந்துவிடுகிறது. இயக்க ஆரம்பத்திலிருந்து 3 விளுடிகளின் இறுதியில் அந்த நிறைகளின் நிலைகளைக் காண்க.

[அவற்றின் தொடக்க நிலைகளிலிருந்து $\frac{9}{17}$ அடி]

6. வழவழப்பான வளையம் ஒன்று ஒரு வழவழப்பான மேசை மீது பொருத்தப்பட்டுள்ளது. வளையத்தில் P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து மேசைப்பரப்பின் வழியே ஒரு துகள் ஏவப்படுகிறது. வளையத்திற்கும் துகளுக்கும் இடையே நிலை மீட்சி எண் e. துகள் ஏவப்பட்ட திசை P-ல் வளையத்தின் ஆரத்துடன் அமைக்கும் கோணம் α ஆகும்.

$$\cot^2 \alpha = \frac{e^2+e+1}{e^3}$$

என்ருல் துகள் வளையத்துடன் இரு மோதல்களுக்குப் பிறகு ஏவப்பட்ட இடத்திற்கே திரும்பும் என நிறுவுக.

7. 20 அடி உயரத்திலிருந்து போடப்பட்ட, மீட்சிக் குணகம் e கொண்ட ஒரு துகள் கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்த 12 அடி நீளமுள்ள ஒரு சாய் தளத்தின் உச்சியில் மோதுகிறது; துகள் சாய்தளத்தின் அடியை 3 துள்ளல்களில் அடையுமாயின்,

$$e(1+e)(1+e^2)(1+e+e^2)=0{\cdot}3$$

எனக் காட்டுக.

8. முறையே 2 பவு., 80 பவு. நிறையுள்ள A, B என்ற இரு கோளங்கள், அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு ஒரு நிலையான சுவருக்கு நேர்குத்தாக இருக்குமாறும், A சுவருக்கு அருகிலிருக்குமாறும் வழவழப்பான தரை ஒன்றின்மீது வைக்கப் பட்டுள்ளன. A, B-ஐ நோக்கி ஏவப்படுகிறது. A, B ஆகிய

வற்றிற்கிடையேயுள்ள மீட்சி எண்ணும் கோணத்திற்கும் சுவருக்கும் இடையேயுள்ள நிலைமீட்சி எண்ணும் $\frac{8}{5}$ எனில் A, B-உடன் இரண்டாவதுமுறை மோதியபின் ஓய்வுபெறும் என நிறுவுக.

9. A என்ற ஒரு பந்து ஓய்விலிருக்கும் B என்ற மற்றொரு பந்தின்மீது நேரடியாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் A ஓய்வு பெற்று B, A-ன் திசைவேகத்துடன் இயங்குமாயின், மீட்சி எண் என்ன ? இரு பந்துகளின் நிறைகளின் விகிதம் என்ன ? A-ஐ ஒப்பு நோக்குமிடத்து B நிறைமிக்கதாக இருப்பின், என்ன நிகழும்?

[$e=1$, $m_1=m_2=1$]

10. 1000 அடி/வி. திசைவேகத்துடன் சுடப்படும் ஒரு ரவை ஒரு மரக்கட்டையினுள் 3 அங். ஊடுருவுகிறது. அதே மரத்தாலான 2 அங். தடிப்பும் 3 பவு. நிறையுமுள்ள நகரக்கூடிய ஒரு மரக்கட்டையினுள் அந்த ரவை அதே வேகத்துடன் சுடப்பட்டால், பலகை துளையிடப்படும் என நிறுவுக. ரவை பலகையைவிட்டு வெளிப்படும் வேகத்தையும் கணக்கிடுக. [37[illegible]·8 அடி/வி.]

7. வட்ட இயக்கம்

(Circular motion)

இந்தப் பகுதியில் சீரான வேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும் துகளின் இயக்கத்தைப்பற்றிப் பார்ப்போம். இயக்கத்திற்கான நியூட்டனின் முதல் விதிப்படி, ஒரு நேர்க்கோட்டில் சீரான வேகத்துடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு பொருள் புறவிசை ஒன்று செயற்பட்டாலன்றித் தன் திசையையோ, வேகத்தையோ மாற்றாது. விசை ஒன்று துகளின் திசையிலேயே செயற்படுமாயின், அதன் வேகத்தை மாற்றும்; ஆனால், திசையை மாற்றாது. எனவே, வட்டத்தின்வழியே சீரான வேகத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் துகளின்மீது, வட்டத்தின் தொடுவரைத் திசையில் (எந்தக் கணத்திலும் துகளின் இயக்கத் திசை) எந்த விசையும் செயற்பட முடியாது. அவ்வாறு செயற்படுமாயின், துகளின் வேகம் மாறுபடும். ஆனால், துகளின் திசை எப்போதும் வட்டமையத்தை நோக்கி அதாவது துகளின் இயக்கத் திசைக்கு நேர்குத்துத் திசையில் ஒரு விசை செயற்படவேண்டும் என்பது தெளிவு. இவ்வாறு மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் விசையின் காரணமாக, பொருள் அத் திசையில் ஒரு முடுக்கம் பெறுகிறது. அந்த முடுக்கம் லம்ப முடுக்கம் (normal acceleration) எனப்படும்.

லம்பவழி முடுக்கத்திற்கான கோவை : m என்ற நிறையை யுடைய ஒரு துகள் O என்ற மையத்தையும் r என்ற ஆரத்தையும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் v என்ற சீரான வேகத்துடன் இயங்கு வதாகக் கொள்வோம். வட்டத்தில் P என்ற புள்ளி ஏதாவதொரு கணத்தில் துகளின் நிலையையும் (Q), மிகக் குறுகிய கால அளவிற்குப் (δt) பின் அதன் நிலையையும் குறிக்கட்டும். [படம்7.1].

$\widehat{POQ} = \delta\theta$ எனவும், வட்ட வில் $PQ = \delta S$ எனவும் இருக்கட்டும்.

P-ல் துகளின் திசை வேகம் (v) PTX என்ற தொடுவரைத் திசையிலும் Q-ல் திசைவேகம் (v), QT_1 என்ற தொடுவரைத் திசையிலும் இருக்கும்.

படம் 7·1

$$\widehat{QTX} = \delta\theta$$

Q-ல் திசை வேகத்தை PTX திசையிலும் அதற்கு நேர்குத்தான PO திசையிலும் பிரிப்போமாயின்,

PTX திசையில் :

v-ன் ஆக்கக் கூறு $= v\cos\delta\theta$

துகளின் திசைவேக மாறுபாடு $= v\cos\delta\theta - v$

∴ துகளின் முடுக்கம் $= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \dfrac{v\cos\delta\theta - v}{\delta t}$

$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \dfrac{v\cos\delta\theta - 1)}{\delta t}$

$= O\ [\because \cos\delta\theta = 1]$

PTX-க்கு நேர்குத்தான அதாவது, PO திசையில்

v-ன் ஆக்கக் கூறு $= v\sin\delta\theta$

துகளின் திசைவேக மாறுபாடு $= v\sin\delta\theta - O = v\sin\delta\theta$

முடுக்கம் $= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \dfrac{v\sin\delta\theta}{\delta}$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{v \sin \delta\theta}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$= v \frac{d\theta}{dt}$$

எனவே, துகளின் முடுக்கம் PO என்ற திசையில் $v \frac{d\theta}{dt}$

துகளின் கோணத்திசை வேகம் w எனின் $w \frac{d\theta}{dt}$

∴ வட்ட மையத்தை நோக்கித் துகளின் முடுக்கம் $= vw$

ஆனால் $v = rw$

எனவே, ஒரு துகள் வட்டப்பாதை ஒன்றில் இயங்குமாயின், வட்டமையத்தை நோக்கி அது பெறும் முடுக்கம் $= rw^2 = \frac{v^2}{r}$

அதாவது, லம்பமுடுக்கம் $(a_c) = rw^2 = \frac{v^2}{r}$ 7.1

லம்பமுடுக்கத்திற்கான மேற்கண்ட கோவையை மற்றொரு முறையிலும் பெறலாம். அது திசைவேக மாறுபாட்டு வரைவியல் முறை அல்லது ஹோடகிராஃப் முறை (Hodograph method) எனப்படும்.

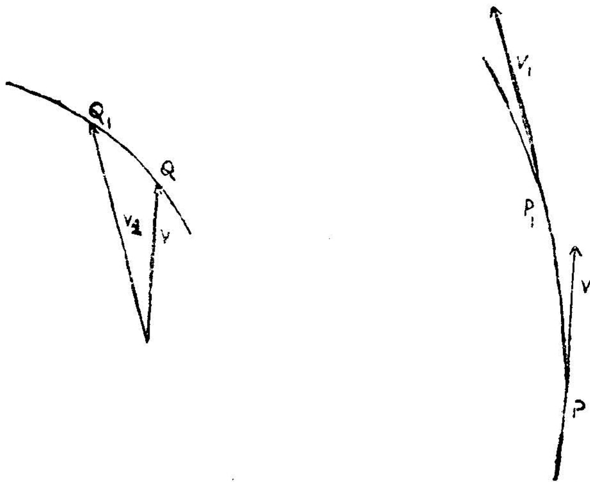
எவ்வகையிலும் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் திசை, திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் குறிக்கக்கூடிய மற்றொரு கோட்டை வரையமுடியும். அத்தகைய கோடு ஹோடகிராஃப் எனப்படும். அதனைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

ஹோடகிராஃப் : ஏதாவொரு பாதையில் ஒரு துகள் இயங்குமாயின், O என்ற நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து துகளின் பாதையில் P என்ற புள்ளியில் OQ என்ற அதன் திசைவேக வெக்டரை வரைவோமாயின், திசைவேக வெக்டரின் Q முனை வரையும் கோடு அத்துகளின் ஹோடகிராஃப் எனப்படும்.

தேற்றம் 7.1 : P என்ற ஒரு துகளின் ஹோடகிராஃபின் வழியே திசைவேக வெக்டரின் முனை (Q)யின் ஏதோவொரு கணத்தில் திசைவேகம் அந்தக் கணத்தில் P-ன் பாதையில் அதன் முடுக்கத்தின் எண் மதிப்பு, திசை ஆகியவற்றைக் குறிக்கும்.

படம் 7.2-ல் P, P_1 என்பன P என்ற துகளின் பாதையில் δt என்ற மிகக் குறுகிய கால அளவின் தொடக்கத்திலும் இறுதியிலும் அதன் நிலைகளைக் குறிக்கும் இரு புள்ளிகள். அப் புள்ளிகளில் அதன் திசைவேகங்கள் முறையே V, V_1 எனக் கொள்வோம்.

O என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து, V, V_1 ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் OQ, OQ_1 என்ற திசைவேக வெக்டர்களை வரைவோமாயின், QQ_1, P-யின் ஹோடகிராஃப் ஆகும்.



படம் 7·2

இனி, துகள் தன் பாதையில் P-லிருந்து P_1-க்கு-க்குச் செல்லும் δt கால அளவில் அதன் திசைவேகத்தை OQ-லிருந்து OQ_1-க்கு மாற்றிக்கொள்கிறது. திசை .வேகங்களின் தொகுப்பு விதிப்படி QQ_1 அத் திசைவேக மாறுபாட்டைக் (δv) குறிக்கிறது.

எனவே, ஹோடகிராஃபில் Q-ன் திசைவேகம் = P-ன் பாதையில்

$$\text{அதன் முடுக்கம்} = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{Q_1Q_2}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\delta v}{\delta t}$$

$$= \frac{dv}{dt}$$

எனவே, ஹோடகிராஃபில் Q-ன் திசைவேகம் P-ன் பாதையில் அதன் முடுக்கத்தின் திசை, எண் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் குறிக்கும்.

<u>சிறப்பு</u> வகைகள்:

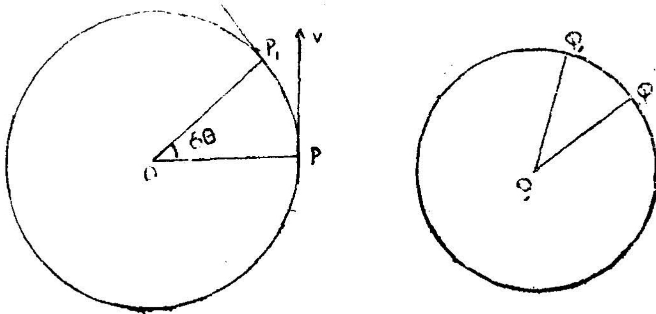
1. சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் P என்ற ஒரு துகளின் ஹோடகிராஃப் P-யின் திசைவேக வெக்டரின்

முனை (Q) சீரான திசைவேகத்துடன் வரையும் மற்றொரு நேர்க் கோடாகும்.

2. சீரான வேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தின் வழியே இயங்கும் P என்ற ஒரு துகளின் ஹோடகிராஃப் P-ன் திசைவேக வெக்டரின் முனை (Q) சீரான வேகத்துடன் வரையும் மற்றொரு வட்டமாகும்.

அடுத்து லம்பமுடுக்கத்திற்கான கோவையை ஹோடகிராஃப் முறையில் எவ்வாறு காணலாம் என்று பார்ப்போம்.

லம்பமுடுக்கத்திற்கான-கோவைஹோடகிராஃப் முறை: O என்ற மையத்தையும் r என்ற ஆரத்தையும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் v என்ற சீரான வேகத்துடன் இயங்கும் P என்ற துகளைக் கருது வோம். [படம் 7.3]. படத்தில் P, P_1 என்பன δt என்ற மிகக் குறுகிய கால அளவின் முதலிலும் முடிவிலும் துகளின் நிலைகளையும் குறிக்கின்றன. P-ன் ஹோடகிராஃப் O_1-ஐ மையமாகவும் v-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட மற்றொரு வட்டமாகும். Q, Q_1 என்பன துகளின் ஹோடகிராபில் துகளின் P, P_1 நிலைகளுக்குரிய புள்ளி களைக் குறிக்கின்றன.



படம் 7.3

மேலும் $\widehat{POP_1} = \widehat{QOQ_1} = \delta\theta$ ஹோடகிராஃபில் Q-ன் திசை வேகம் P-ன் பாதையில் அதன் முடுக்கத்தைக் கொடுக்கும். ஹோடகிராஃபில் Q, δt கால அளவில் கடக்கும் தொலைவு

$$QQ_1 = v\delta\theta$$

$$\therefore \quad \frac{QQ_1}{\delta t} = v\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

எனவே, Q-ன் திசைவேகம்

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{QQ_1}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} v \frac{\delta \theta}{\delta t}$$

$$= v \frac{d\theta}{dt}$$

ஆனால் $\frac{d\theta}{dt}$ = P-ன் கோணத் திசைவேகம்

$$= w = \frac{v}{r}$$

எனவே, Q-ன் திசைவேகம் $vw = \frac{v^2}{r} = rw^2$

மேலும், Q, O_1 Q-க்கு நேர்குத்துத் திசையில் அதாவது PO-க்கு இணையான திசையில் இயங்குகிறது.

எனவே PO திசையில் P-ன் முடுக்கம் (a_c)

$$= \text{ஹோடகிராஃபில் Q-ன் திசைவேகம்} = \frac{v^2}{r}$$

அதாவது, லம்பமுடுக்கம் $(a_c) = \frac{v^2}{r}$

துகளின் நிறை m என்றால் லம்பமுடுக்கத்தை விளைவிக்கக் கூடிய

விசை $\frac{mv^2}{r} = mrw^2$ ஆகும்.

இந்த விசை, மைய நோக்கு விசை (centripetal force) என அழைக்கப்படும். இந்த மைய நோக்கு விசை பலவகைகளில் உருவாகிறது. கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்டுச் சுழற்றப்படும் ஒரு கல்லின் இயக்கத்தில், கயிற்றின் இழுவிசை இந்த மையநோக்கு விசையாகும். வளைவுப் பாதையில் செல்லும் ஓர் உந்து வண்டியைப் பொறுத்தவகையில், உந்து வண்டியின் சக்கரத்திற்கும் தரைக்கு மிடையே உள்ள உராய்வு இவ் விசையைத் தருகிறது.

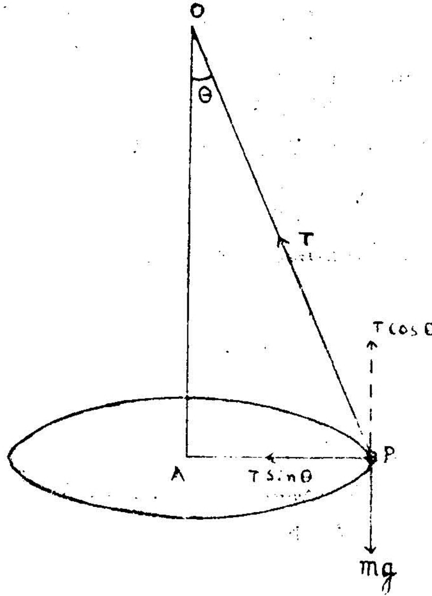
கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்ட கல்லை ஒருவன் சுழற்றும் போது, கயிற்றின் இழுவிசை கல்லின் லம்பமுடுக்கத்திற்குத் தேவையான விசையைக் கொடுக்கிறது. நியூட்டனின் மூன்றுவது விதிப்படி, கயிறு மனிதனின் கையில் அதன் இழுவிசைக்குச் சமமான எதிர்விசை ஒன்றைச் செயற்படுத்துகிறது. அதாவது, மையத்தைவிட்டு விலகும் திசையில் ஒரு விசையைச் செயற்படுத்து

கிறது. இவ் விசை மைய விலக்கு விசை (centrifugal force) எனப்படும்.

கூம்பு ஊசல் (Conical pendulum)

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப் பட்ட ஒரு துகள், கிடைத்தளத்தில் ஒரு வட்டத்தில் இயங்குமாயின், கயிறு நிலையான புள்ளிவழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டை அச்சாகக்கொண்ட ஒரு கூம்பை வரையும். அவ்வாறு இயங்கும் துகளும் கயிறும் சேர்ந்த அமைப்பு கூம்பு ஊசல் எனப்படும்.

படம் 7.4-ல் O என்பது நிலையான புள்ளியையும் P என்பது



படம் 7.4

துகளையும் OP என்பது கயிற்றையும் A என்பது துகள் இயங்கும் வட்டத்தின் மையத்தையும் குறிக்கின்றன.

கயிறு செங்குத்து நிலையோடு அமைக்கும் கோணம் θ எனவும், கயிற்றின் இழுவிசை T எனவும், நீளம் l எனவும் கிடைத்தள வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும் துகளின் நிறை m எனவும் கோணத் திசைவேகம் w எனவும் கொள்வோம். ஊசலின் சுழற்சி நேரம் (t), நீளம் (l), கயிறு செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணம் (θ) ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

துகளுக்கு லம்ப முடுக்கத்தைக் கொடுக்கக்கூடிய மைய நோக்கு விசை (mrw^2) PA வழியே செயற்படுகிறது.

துகளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

1. கயிற்றின் இழுவிசை (T);

2. செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் துகளின் எடை (mg).

கயிற்றின் இழுவிசையைச் செங்குத்துத் திசையிலும் கிடை மட்டத்திலும் முறையே $T\cos\theta$, $T\sin\theta$ எனப் பிரிப்போமாயின், செங்குத்துத் திசையில் பொருள் எவ்வித இயக்கமும் பெறவில்லை ஆதலால்,

$$T\cos\theta = mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7.2$$

மேலும்,
$$T\sin\theta = mrw^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7.3$$

ஆனால்,
$$r = PA = l\sin\theta$$

$$\therefore \quad T = mlw^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7.4$$

சமன்பாடுகள் 7.2, 7.3-லிருந்து

$$\cos\theta = \frac{g}{lw^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7.5$$

θ-ன் உண்மையான மதிப்புகளுக்கு

$$g < lw^2$$

அல்லது
$$w^2 > \frac{g}{l}$$

அதாவது,
$$w > \sqrt{\frac{g}{l}}$$

இனி, O-லிருந்து துகளின் ஆழம் h எனில்,

$$OA = h = l\cos\theta$$

$$= \frac{g}{lw}$$

அதாவது
$$h = \frac{g}{w^2}$$

எனவே, ஊசலின் தொங்குதானத்திலிருந்து துகளின் ஆழம் கயிற்றின் நீளத்தைச் சார்ந்திருப்பதில்லை; மாறாக, துகளின் கோணத் திசைவேகத்தின் இரு மடிக்கு எதிர் விகிதத்திலிருக்கிறது.

சமன்பாடு 7·5-லிருந்து,

$$w^2 = \frac{g}{l\cos\theta}$$

$$w = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

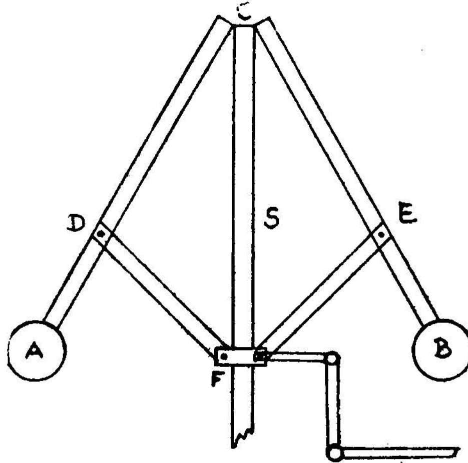
எனவே, ஊசலின் சுழற்சி நேரம்,

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}6$$

நீராவி எந்திரங்களின் வேகங்காக்கும் அமைவு

கூம்பு ஊசலில் தொங்கு தானத்திலிருந்து துகளின் ஆழம் அதன் கோணத் திசைவேகத்தின் இருமடிக்கு எதிர்விகிதத்திலிருக்கிறது என்ற கருத்தை அடிப்படையாகக்கொண்டு அமைக்கப்பட்டது இக் கருவி. இதன் அமைப்பைப் படம் 7·5 ல் காணலாம். இதனை ஓர் இரட்டைக் கூம்பு ஊசலாகக் கருதலாம்.

AC, BC என்பன எந்திரத்தால் சுழற்றப்படும் ஊடச்சுமுனை (S) வுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் இரு உலோகச் சட்டங்கள். அவைகளின் மறு முனைகளில் A,B என்ற இரு எடைகள் உள்ளன.



படம் 7·5

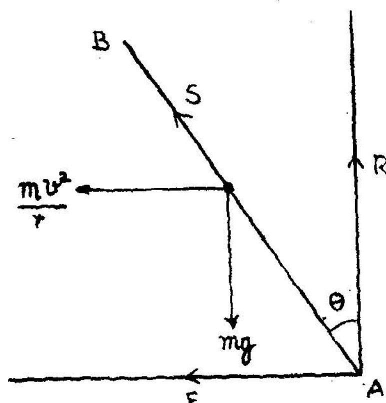
இவ் விரு உலோகச் சட்டங்களும் DE,EF என்ற மற்றுமிரு உலோகச் சட்டங்களால், F என்ற ஒரு நழுவு வளையத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. வளையத்துடன் ஒரு நெம்புகோல் அமைப்பு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த நெம்புகோல் அமைப்பானது, வளையம் மேலே செல்லும்போது எந்திரத்திற்கு நீராவி செல்லும் பாதையைச் சற்று மூடுமாறும், வளையம் கீழே இறங்கும்போது நீராவியின் பாதையைத் திறக்குமாறும் உள்ளது.

எந்திரத்தின் வேகம் அதிகமாகும்போது, ஊடச்சுழுலையின் கோணத் திசைவேகமும் அதன் பயனாய் A,B ஆகிய இரு எடைகளின் கோணத் திசைவேகமும் அதிகமாகும். ஆகவே, F மேலே சென்று நெம்புகோல் அமைப்பை எந்திரத்திற்கு நீராவிசெல்லும் பாதையை மூடச்செய்யும். எனவே, வேகம் தானாகவே குறையும். அவ்வாறே வேகம் குறையும்போது, F கீழிறங்கி நீராவியின் பாதை திறக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு எந்திரத்தின் வேகம் தானாகவே கட்டுப் படுத்தப்படுகிறது.

வட்டப்பாதை வழியே மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவரின் இயக்கம்

வட்டமான சமதளப் பாதை ஒன்றில் ஒருவர் மிதிவண்டியில் செல்லும்போது, அவர் அந்த வட்டப் பாதையின் மையத்தை நோக்கி அவரது உடம்பைச் சாய்ப்பதை நாம் காணலாம். இதன் பயனாய்த் தரையானது அவர்மீதும் வண்டிமீதும் செயற்படுத்தும் எதிர்விசை செங்குத்து நிலைக்குச் சற்று சாய்கிறது. அவ்வாறு சாய்ந்த திசையில் செயற்படும் எதிர் விசையின் செங்குத்து ஆக்கக் கூறு, மிதி வண்டியின் எடையோடு அவரது எடையைச் சரியீடு செய்கிறது; கிடைத்தள ஆக்கக் கூறு வட்டப் பாதையில் அவரது இயக்கத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையைத் தருகிறது.

படம் 7·6-ல் AB, மிதி வண்டியையும் அதன்மீது சவாரி செய்பவரையும், G அவர்களின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் குறிக்கின்றன.



படம் 7·6

மிதிவண்டியின் சக்கரம் தரையைத் தொடுமிடத்தில் (A) லம்ப எதிர் விசை R எனவும் வட்டப் பாதையின் மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் உராய்வு விசை F எனவும் கொள்வோம். AB, செங்குத்து

நிலையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என இருக்கட்டும். A-ல் செயற் படும் F,R ஆகிய இரு விசைகளின் தொகுபயன் G வழியே தரை செயற்படுத்தும் எதிர்விசையாகும். அந்த எதிர்விசையை S எனக் கொள்வோமாயின்,

$$R = S\cos\theta = mg$$

$$F = S\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

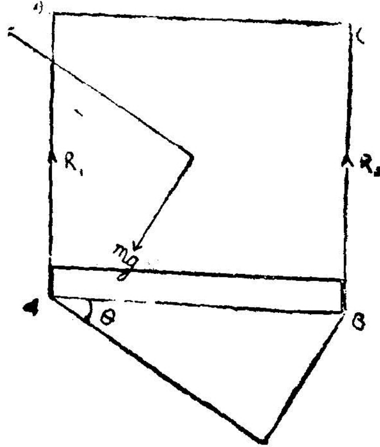
$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}7$$

சமன்பாடு 7.7 லிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவுப்பாதையில் மிதி வண்டியில் செல்லும் ஒருவரின் வேகம் அதிகமாகும்போது, அவர் செங்குத்து நிலையிலிருந்து அதிகமாகச் சாயவேண்டிருக்கும் எனத் தெளிவாகிறது. எனவே, குறைந்த ஆரமுடைய வளைவுப்பாதையில் ஒருவர் அதிக வேகமாகச் செல்வாராயின், அவர் கீழே விழ நேரிடும்.

வட்டப்பாதை வழியே இரயில் பெட்டியின் இயக்கம்: சமதளத்தில் உள்ள ஒரு வட்டப் பாதையின் வழியே செல்லும்போது, தண்ட வாளங்கள் செயற்படுத்தும் எதிர்விசைகள் பெட்டியின் எடையைச் சரியீடு செய்கின்றன. சக்கரங்களின் விளிம்புகள் தண்டவாளங் களின்மீது செயற்படுத்தும் அழுத்தம் வட்டப்பாதையில் பெட்டி செல்வதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையைக் கொடுக் கிறது. இதனால் தண்டவாளங்களும் சக்கரங்களும் விரைவில் தேய்ந்து சேதமாகும். இருப்புப் பாதையின் குறுக்குக் கட்டைகளை (sleepers) கிடைத்தளத்திற்குச் சற்று சாய்ந்திருக்குமாறு அமைப் பதன் மூலம், இத்தகைய சேதத்தைக் குறைக்கலாம். வட்டப் பாதையின் வெளிப்புறம் இருக்கும் தண்டவாளம் உட்புறம் இருக்கும் தண்டவாளத்தைவிட, உயர் மட்டத்தில் அமைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட பாதையில் பெட்டியின் இயக்கத்தைப் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

படம் 7·7 ல் ABCD, பெட்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் (G) வட்டப் பாதையின் மையம் (O) ஆகியவற்றின்வழியே செல்லும் செங்குத்துத் தளவெட்டு முகத்தைக் குறிக்கிறது; A, B புள்ளிகள் பெட்டியின் சக்கரங்கள் தரையைத் தொடுமிடங்களைக் குறிக்கின்றன. பெட்டியின் நிறை m எனவும் வேகம் v எனவும் பெட்டியின் அடித் தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் உட்புற, வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள் செயற்படுத்தும் எதிர் விசைகள்

R_1, R_2 எனவும் கொள்வோம். தண்டவாளங்கள் சக்கர விளிம்பு களின்மீது எவ்வித அழுத்தத்தையும் செயற்படுத்தவில்லை எனவும் கொள்வோம்.



படம் 7·7

தண்டவாளங்களில் எதிர் விசைகளைச் செங்குத்துத்திசையிலும் கிடைமட்டத்திலும் பிரிப்போமாயின்,

$$(R_1+R_2)\cos\theta = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}8$$

$$(R_1+R_2)\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}9$$

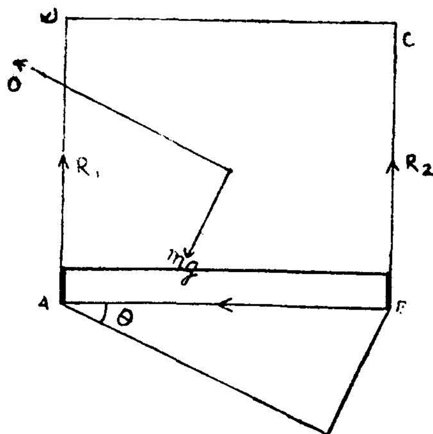
சமன்பாடுகள் 7.8, 7.9-லிருந்து

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}10$$

எனவே, r என்ற ஆரமுடைய வட்டப்பாதையின் வழியே பெட்டி v என்ற வேகத்துடன் இயங்கும்போது, தண்டவாளங்களின் மீது சக்கர விளிம்புகள் எவ்வித அழுத்தத்தையும் செயற்படுத்தாம லிருக்கக் குறுக்குக் கட்டைகளைக் கிடைத்தளத்திற்குச் சமன்பாடு 7·10-ஆல் கொடுக்கப்படும் கோணத்தை அமைக்குமாறு பொருத்த வேண்டும்.

எனினும், பெட்டி v க்கு மாறுபட்ட வேகத்துடன் அப்பாதையில் செல்லுமாயின், சக்கரவிளிம்புகள் தண்டவாளங்களின்மீது செயற் படுத்தும் அழுத்தத்தைத் தவிர்க்கமுடியாது. பெட்டி v என்ற வேகத்துடன் செல்லும்போது, தண்டவாளங்கள் சக்கர விளிம்பு

களின்மீது செயற்படுத்தும் அழுத்தம் (F) B-லிருந்து A-க்குச் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம். [படம் 7·8]



படம் 7·8

இனி,

$(R_1+R_2)\cos\theta - F\sin\theta = mg$ ... ... 7·11

$(R_1+R_2)\sin\theta = F\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$ ... ... 7·12

சமன்பாடு 7·11-ஐ sin θ-ஆலும் சமன்பாடு 7·12-ஐ cos θ-ஆலும் பெருக்கி இரண்டாவதிலிருந்து முதலாவதைக் கழிக்க,

$$F = \frac{mv^2}{r}\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$= \frac{m\cos\theta}{r}(v^2 - vg\tan\theta)$$

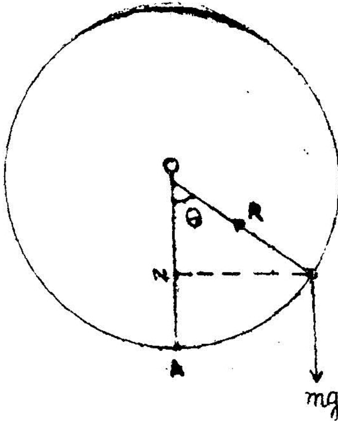
ஆனால், $\tan\theta = \frac{V^2}{rg}$ (சமன் 7·10)

எனவே, $F = \frac{m\cos\theta}{r}(v^2 - V^2)$

இனி, V > v என்றால் F நேர்க்குறியுடையதாயிருக்கும். எனவே, தண்டவாளங்கள் சக்கர விளிம்பின்மீது செயற்படுத்தும் விசை B-லிருந்து A-ன் திசையில் அதாவது வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தால் செயற்படுத்தப்படும்.

$V < v$ என்றால் F எதிர்குறியுடையதா யிருக்கும் எனவே, தண்டவாளம் சக்கர விளிம்பின்மீது செயற்படுத்தும் விசை A-லிருந்து B-ன் திசையில் அதாவது உட்புறத் தண்டவாளத்தால் செயற் படுத்தப்படும்.

சுழலும் கம்பியில் ஒரு துகளின் சார்பமைதி (relative rest) : வட்ட வில் வடிவத்தில் வளைக்கப்பட்டு அதன் தளத்திலுள்ள ஒரு செங்குத்தான அச்சைப்பற்றிச் சீரான கோணத்திசை வேகத்துடன் சுழற்றப்படும் வழவழப்பான கம்பி ஒன்றில் ஓர் உருமணி (bead) கோக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். உருமணியானது கம்பி யின் தாழ்ந்த புள்ளியைத் தவிர, வேறு புள்ளிகளிலும் கம்பியைப் பொறுத்தவரை ஓய்வில் இருக்கும் என நிறுவலாம்.



படம் 7·9

கம்பி வட்டமாக வளைக்கப் பட்டு, அதன் செங்குத்து விட்டத் தைப்பற்றிச் சுழலுவதாகக் கொள் வோம்.

படம் 7·9-ல் O, வட்டமையத் தையும் AB செங்குத்து விட்டத் P உருமணியின் நிலையையும் குறிக்கின்றன. வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும் கோணத் திசைவேகம் w எனவும் உருமணியின் நிறை m எனவும் $\widehat{POA} = \theta$ எனவும் இருக் கட்டும்.

கம்பி சுழற்றப்படும்போது, உருமணி கிடைத்தளத்தில் N-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் இயங்குவதால், அந்த இயக் கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை PN வழியே செயற்படு கிறது. இந்த மையநோக்கு விசையை ($m.PN.w^2$) உருமணியின் மீது கம்பி செயற்படுத்தும் எதிர்விசை கொடுக்கிறது. அந்த எதிர் விசையை R எனக் கொள்வோமாயின், அதன் செங்குத்து ஆக்கக் கூறு ($R\cos\theta$) உருமணியின் எடையைச் சரியீடு செய்கிறது; கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு ($R\sin\theta$)மைய நோக்கு விசையைக் கொடுக்கிறது. எனவே,

$$R\cos\theta = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}13$$

$$R\sin\theta = m.\,PN.\,w^2$$

$$= m\,r\sin\theta\,w^2$$

அல்லது $\sin\theta\,(R - m\,r\,w^2) = 0$ ... ... 7·14

சமன்பாடு 7·14-லிருந்து நாம் அறிவதாவது: ஒன்று $\sin\theta$ சுழியாக வேண்டும்; அல்லது $R - m\,r\,w^2$ சுழியாகவேண்டும்.

1. $\sin\theta = 0$ என்றால் $\theta = 0$ அல்லது π.

எனவே, தாழ்ந்த புள்ளி A, அல்லது உச்சப்புள்ளி B கம்பியின் மீது உருமணியின் சார்பமைதி நிலைகளாகும். இங்கு $\theta = 0$ அல்லது π என்பதால்,

$$R = mg$$

2. $R - m\,r\,w^2 = 0$ என்றால் $R = m\,r\,w^2$

எனவே சமன் 7·13-லிருந்து

$$\cos\theta = \frac{g}{r\,w^2}$$

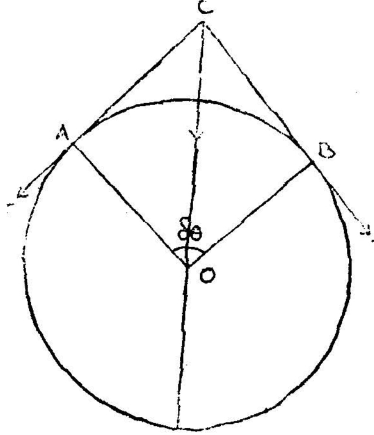
θ-ன் உண்மையான மதிப்புகளுக்கு

$$g < r\,w^2 \text{ அல்லது } w > \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$g > r\,w^2$ என்றால் θ ஒரு கற்பனை மதிப்பையே பெறமுடியும். எனவே, உருமணி A, B-ஐத்தவிர, P-ஐப் போன்ற வேறெந்தச் சாய்ந்த நிலையிலும் சார்பமைதியில் இருக்காது. கம்பியின் தாழ்ந்த புள்ளியான A-ல் உருமணி நிலை சமநிலையிலும் (stable equilibrium) உச்சிப் புள்ளியான B-ல் நிலையிலாச் சம நிலையிலும் (unstable equilibrium) இருக்கும். P-ஐப் போன்ற சாய்ந்த நிலையில் உருமணி எப்பொழுதும் நிலைச் சமநிலையில் இருக்கும். கோணத்திசை வேகத்தின் மதிப்பு $\sqrt{\frac{g}{r}}$-ஐவிடக் குறைவாக இருப்பின் உருமணி கம்பியின் தாழ்ந்த புள்ளியில் சார்பமைதியில் இருக்கும். வளைவான வழவழப்பான சுழலும் குழாய் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்ட வழ வழப்பான உருமணி ஒன்றின் சார்பமைதி நிலைக்கும், சுழலும் வழவழப்பான கோளம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்டு அதனுடன் சுழலும் துகளின் சார்பமைதி நிலைக்கும் மேற்கூறிய நிபந்தனைகள் பொருந்தும்.

சுழலும் கம்பியின் இழுவிசை: ஒரு வட்டவடிவக் கம்பி அல்லது தோல்பட்டை அதன் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றப்படுமாயின், அதில் ஓர் இழுவிசை உருவாகும். வட்டம் கிடைத்தளத்தில் அமைவதாகக் கொள்வோமாயின், அதன் எடையைக் கணக்கிலெடுத்துக் கொள்ளத் தேவையில்லை.

படம் 7.10-ல் வட்டவடிவக் கம்பியின் AB என்ற ஒரு சிறு பகுதியைக் கருதுவோம். அது வட்ட மையத்தில் (o) அமைக்கும்



படம் 7·10

கோணம் $\delta\theta$ எனவும் வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும் கோணத் திசை வேகம் w எனவும் இருக்கட்டும்.

ஓரலகு நீளக்கம்பியின் நிறை m எனில் AB-ன் நிறை

$$m \,.\, AB = mr\delta\theta$$

இந்தப் பகுதி w என்ற கோணத் திசை வேகத்துடன் இயங்குவதால், அத்தகைய இயக்கத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை $mr\delta\theta rw^2 = mr^2w^2\delta\theta$.

இந்த விசையை A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட CA, CB என்ற தொடு வரைகளின் வழியே செயற்படும் இழு விசைகள் கொடுக்கின்றன. இந்த இழுவிசைகள் ஒவ்வொன்றும் T எனில் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் $(180-\delta\theta)$ ஆதலால், அவற்றின் தொகுபயன் $2T\cos\left(90-\frac{\delta\theta}{2}\right) = 2T\sin\frac{\delta\theta}{2}$ ஆகும்.

இத் தொகுபயன் அக் கோணத்தின் இரு சமவெட்டியான CO வழியே செயற்படும். $\delta\theta$ சிறிய மதிப்பையுடையதாதலால்,

$$\text{தொகுபயன்} = 2T\sin\frac{\delta\theta}{2} = T\delta\theta$$

$\therefore$ மைய நோக்கு விசை $T\delta\theta = mr^2w^2\delta\theta$

அல்லது $T = mr^2w^2 = mv^2$ ……..7.15

கம்பி தாங்கக்கூடிய பெரும இழுவிசை T_m என்றால், w-ன் பெரும மதிப்பு $w_m = \sqrt{\frac{T_m}{mr^2}}$

பெரும இழுவிசையை ஓர் அலகுக் குறுக்குப் பரப்பளவில் செயற்படக்கூடிய விசையின் அடிப்படையில் குறிப்பிடுவது வழக்கமாகும். எனவே, கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவு A, அடர்த்தி P அலகு குறுக்குப் பரப்பளவில் அது தாங்கும் பெரும இழுவிசை To என்றால்,

$$m = PA; \qquad T_m = ToA$$

$$\text{எனவே,} \quad w_m = \sqrt{\frac{ToA}{PAr^2}} = \sqrt{\frac{To}{Pr^2}}$$

அதாவது, பெரும கோணத் திசைவேகம்

$$w_m = \sqrt{\frac{To}{Pr^2}} \qquad \dots\dots\dots\dots 7.16$$

பெரும கோணத் திசைவேகத்தின் இம் மதிப்பு கம்பி அல்லது பட்டையின் குறுக்குப் பரப்பளவைச் சார்ந்திருக்கவில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 1. 12 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிறு 3 பவு. எடையைச் சற்றே தாங்கமுடியும். அதன் ஒரு முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பவுண்டு நிறையையுடைய ஒரு துகள், வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின்மீது, கயிற்றின் மறுமுனையைப் பற்றிக் கயிறு அறுபடாமல் சுழலக்கூடிய பெரும வேகம் என்ன?

துகளின் பெரும வேகம் v என இருக்கட்டும்.

$$\text{துகளின் லம்ப முடுக்கம் } (a_c) = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \frac{v^2}{12} \text{ செ.மீ/வி}^2$$

கயிற்றின் பெரும இழுவிசை = லம்ப முடுக்கம் கொடுக்கக் கூடிய விசை

$$T = m \cdot a$$

$$= 1 \times \frac{v^2}{12} \text{ பவுண்டல்கள்}$$

ஆனால், $T = 3 \times 32$ பவுண்டல்கள்

$$\therefore \quad 3 \times 32 = \frac{v^2}{12}$$

$$\therefore \quad v = 24 \times \sqrt{2} \text{ அடி/வி.}$$

ஒரு விநாடியில் துகளின் பெருமச் சுழற்சி எண்ணிக்கை n எனின்,
$$v = 24\sqrt{2} = 2\pi n \times 12$$

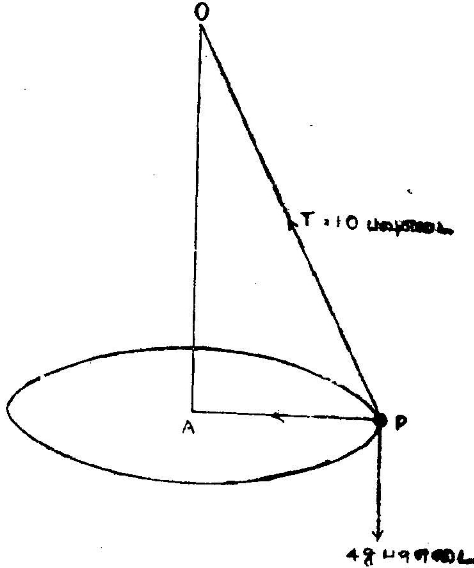
$$\therefore \quad n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \text{ சுழற்சிகள்/வி.}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2. ஒரு கூம்பு ஊசலின் 10 அடி நீளமுள்ள கயிறு 10 பவு. எடையைச் சற்றே தாங்கமுடியும். குண்டின் எடை 4 பவு. எனின் கயிறு அறுபடாமல் அது பெறக்கூடிய பெருமவேகம் என்ன? குண்டு இயங்கும் வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கணக்கிடுக.

கயிற்றின் இழுவிசை T எனவும் அது செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் குண்டின் கோணத் திசை வேகம் w எனவும் குண்டின் பெருமச் சுழற்சி எண்ணிக்கை n எனவும் கொள்வோம். [படம் 7·11]

இனி, $T \cos\theta = mg$

$10 \times 32 \cos\theta = 4 \times 32$



படம் 7·11

$$\cos\theta = \frac{2}{5}$$

$$\theta = 66°23'$$

$$T \sin \theta = mrw^2$$
$$T \sin \theta = m\, l \sin \theta\, w^2$$
$$T = m\, l\, w^2$$
$$10 \times 32 = 4 \times 10 \times 4\pi^2 n^2$$
$$n^2 = \frac{2}{\pi^2}$$

அல்லது $n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ சுழற்சிகள்/வி.

மேலும், $r = l \sin \theta$

$$= 10 \sin 66^\circ 23'$$
$$= 9{\cdot}163 \text{ அடி.}$$

மாதிரிக் கணக்கு 3. $\frac{1}{4}$ மைல் ஆரத்தையுடைய வட்ட வில்லாக அமைந்த ஓர் இருப்புப் பாதையில் இரு தண்டவாளங் களுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு 5′ 6″. 36 மணி/மைல் பெரும வேத்திற்கு வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிட எவ்வளவு உயர்த்தப்படவேண்டும்?

வட்டப் பாதைவழியே v வேகத்துடன் செல்லும் ரயில் பெட்டியின் சக்கரங்களின்மீது தண்டவாளங்களின் அழுத்தம் இல்லாதிருக்க வேண்டுமாயின், குறுக்குக் கட்டைகளைக் கிடைத்தளத்திற்கு θ கோணத்தில் அமைக்க வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg} \quad (\text{சமன் } 7.10)$$

$$\tan \theta = \frac{36 \times 36}{1320 \times 32} = \frac{27}{880}$$

θ-ன் மதிப்பு சிறியதாயிருப்பதால்

$$\tan \theta = \theta s = in\ \theta = \frac{27}{880}$$

உட்புறத் தண்டவாளத்திலிருந்து வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தின் உயரம் h எனில், $\sin \theta = \frac{h}{l} = \frac{27}{880}$

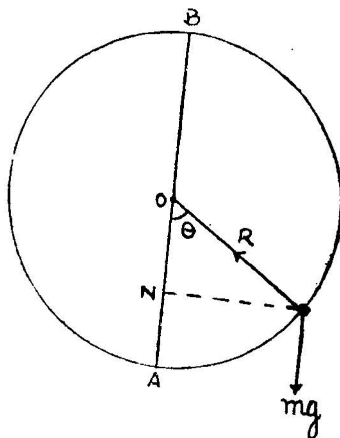
$$h = \frac{27 \times 11}{880 \times 2} = \frac{27}{160} \text{ அடி.}$$

$$h = 2 \text{ அங்குலம்.}$$

வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிட 2அங். உயர்த்தப்படவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 4. ஓர் அடி ஆரமுள்ள கோளவடிவக் கோப்பை ஒன்றின் உட்புறத்தைச் சுற்றிக் கிடைத்தளத்தில் ஒரு துகள் இயங்குகிறது. அது ஒரு வினாடிக்கு ஒருமுறை சுழன்றால், கோப்பையின் அடியிலிருந்து அதன் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 7·12-ல் O, கோப்பையின் மையத்தையும் P, கோப்பை சுழலும்போது, துகளின் நிலையையும் குறிக்கின்றன. கோப்பை



படம் 7·12

துகளின்மீது செயற்படுத்தும் எதிர் விசை R, துகளின் நிறை m எனக் கொள்வோம்.

$\widehat{PON} = \theta$ என இருக்கட்டும்.

R-ன் செங்குத்து ஆக்கக் கூறு $R \cos \theta = mg$ ... (i)

R-ன் கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு $R \sin\theta = m. PN. w^2$

$= m. PO \sin \theta\, w^2$

$\therefore \quad R = m. PO. w^2$ ... (ii)

சமன்பாடுகள் (i), (ii) லிருந்து $\cos \theta = \dfrac{g}{Po \times w^2}$

இங்கு PO = 1 அடி $w = 2\pi n = 2\pi$

எனவே, $\cos \theta = \dfrac{g}{4\pi^2}$

மேலும் கோப்பையின் அடியிலிருந்து துகளின் உயரம்

$$AN = PO - PO \cos \theta$$

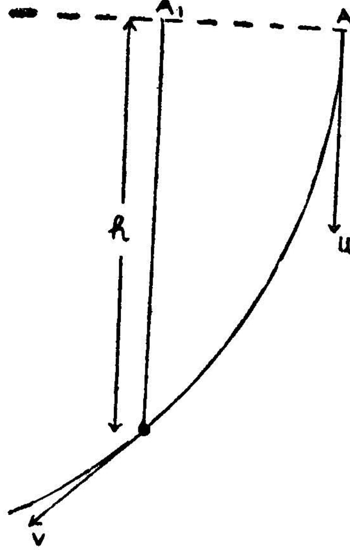
$$= PO\ (1 - \cos\theta)$$

$$= PO \left(1 - \frac{g}{4\pi^2}\right)$$

$$NA = \left(1 - \frac{32}{4\pi^2}\right) \text{ அடி}$$

AN = 2·274 அங்குலம்

செங்குத்தளத்தில் அமைந்த ஒரு வளேவின் வழியே ஒரு துகளின் இயக்கம் : செங்குத்துத்தளத்தில் அமைந்த ஒரு வழவழப்பான வளேவில் A என்ற புள்ளியில் u என்ற திசை வேகத்துடன் தொடங்கி. வளேவின் வழியே கீழ்நோக்கி நழுவும் ஒரு துகளைக் கருதுவோம்) [படம் 7·13]. B என்ற புள்ளியில் அதன் திசை வேகத்தை (v)



படம் 7·13

ஆற்றல் அழியாமை விதிப்படி பின்வருமாறு பெறலாம். A-லிருந்து B-ன் செங்குத்து ஆழம் h எனக் கொள்வோம்.

வளேவு வழவழப்பானதாகையால் அது துகளின்மீது செயற் படுத்தும் எதிர்விசை எப்பொழுதும் துகளின் இயக்கத்திற்கு நேர் குத்துத் திசையிலேயே இருக்கும். எனவே, எதிர்விசை எவ்வித வேலேயும் செய்வதில்லே. ஆற்றல் அழியாமை விதிப்படி துகள் A-லிருந்து, B-க்கு இயங்கும்போது அதன் நிலேயாற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு துகள் B-ஐ அடையும்போது அதன் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாட்டிற்குச் சமமாகும்.

துகளின் நிறை m எனில்,

A-ல் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mu^2$

B-ல் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$

எனவே, B-ல் அதன் இயக்க ஆற்றல் மிகுதிப்பாடு

$$= \frac{1}{2} m(v^2 - u^2)$$

துகள் A-லிருந்து, B-க்கு வளைவின்வழியே நழுவும்போது அது கடந்த செங்குத்துத் தொலைவு h.

எனவே, அந்த இயக்கத்தின்போது,

அதன் நிலையாற்றல் இழப்பு $= mgh$

ஆற்றல் அழியாமை விதிப்படி,

$$\frac{1}{2} m(v^2 - u^2) = mgh$$

அல்லது $$v^2 - u^2 = 2gh$$

அல்லது $$v^2 = u^2 + 2gh \quad \ldots \quad 7{\cdot}17$$

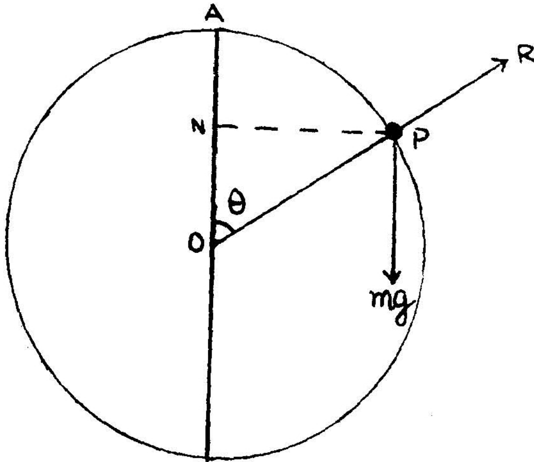
சமன்பாடு 7·17, B-ல் துகளின் திசைவேக மதிப்பைக் கொடுக்கிறது.

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுச் செங்குத்துத் தளத்தில் இயங்கும் ஒரு துகளுக்கும் (தனி ஊசலின் குண்டு) சமன் 7·17 பொருந்தும்.

துகள் வளைவின் வழியே B-லிருந்து மேல்நோக்கி u என்ற திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டினும், A-ல் அதன் திசைவேகத்தை (v) $v^2 = u^2 + 2gh$ என்னும் சமன்பாட்டால் பெறலாம்.

செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில், துகளின் இயக்கம்

1. வழவழப்பான வட்டத்தின் வெளிப்புறத்தில் நழுவும் துகளின் இயக்கம்: m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகள், O என்ற மையத்



படம் 7·14

தையும் r என்ற ஆரத்தையும்கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் உச்சி

(A) யிலிருந்து வட்டத்தின் வெளிப் புறத்தில் நழுவுவதாகக் கொள்வோம். [படம் 7·14]. துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகும் புள்ளியைப் பின்வருமாறு பெறலாம். துகள் வட்டத்தின்மீது P என்ற ஒரு புள்ளியில் இருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம்.

படம் 7·14-ல் $\widehat{PON} = \theta$ எனவும், AN=h எனவும் இருக்கட்டும். P-ல் துகளின் வேகம் v எனில்,

$$v^2 = 2gh$$

ஆனால், $$AN = h = AO - BO = r(1-\cos\theta) \quad ...7·19$$

$$\therefore \quad v^2 = 2gr(1-\cos\theta)$$

துகள் ஒரு வட்டத்தின்மீது இயங்குவதால், அதன் வட்ட இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை

$$\frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta)$$

P-ல் துகளின்மீது வட்டம் செயற்படுத்தும் அழுத்தம் R எனக் கொள்வோமாயின் PO வழியே செயற்படும் விசை (மைய நோக்கு விசை) $2mg(1-\cos\theta) = mg\cos\theta - R$

$$R = mg(3\cos\theta - 2) \quad ... \quad ... \quad ... \quad 7·20$$

சமன்பாடு 7·20-லிருந்து $3\cos\theta > 2$ எனில் R நேர்க்குறியுடையதாயமைந்து P-லிருந்து O-க்கு உள்நோக்கிச் செயற்படும்.

$3\cos\theta < 2$ எனில் R எதிர் குறியுடையதாகும்; எனவே, O-லிருந்து P-க்கு அதாவது மையத்தைவிட்டு விலகிச் செயற்படும்.

$3\cos\theta = 2$ எனில், R சுழியாகும்.

எனவே, $3\cos\theta = 2$ அதாவது $\cos\theta = \frac{2}{3}$ என்னும் நிலையில் துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகும்.

துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகும்போது, A-விருந்து அதன் ஆழம் h-எனில் சமன், 7·19-லிருந்து,

$$h = r\left(1-\tfrac{2}{3}\right) = \frac{r}{3}$$

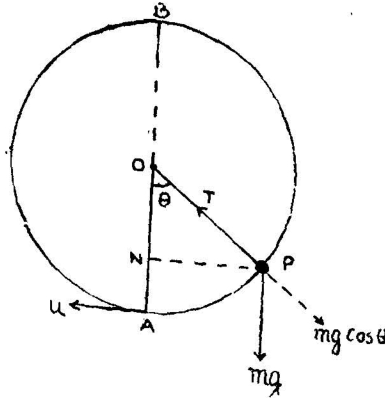
வட்டத்தைவிட்டு விலகிய துகள்

$$v = \sqrt{2gr\left(1-\tfrac{2}{3}\right)} = \sqrt{\tfrac{2}{3}gr}$$

என்னும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்பட்ட ஓர் ஏவு துகளாக இயங்கும்.

2. தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு துகளின் இயக்கம்

m என்ற திணிவையுடைய ஒரு துகள் O என்ற ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து l நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. [படம் 7·15]. துகள் O-ஐ மையமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் இயங்குமாறு அதன் தொடக்க நிலையான A-லிருந்து u என்ற திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுவதாகக் கொள்வோம். வட்டத்தில் துகளின் இயக்கத்தின்போது எந்தவொரு கணத்திலும்



படம் 7·15

அதன் திசைவேகம், கயிற்றின் இழுவிசை ஆகியவற்றைக் காண்பதன் மூலம் துகள் (a) தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றிவருவதற்கு, (b) அலைவியக்கம் மேற்கொள்வதற்கு, (c) வட்டத்தில் இயங்க மறுப்பதற்கு உரிய நிபந்தனைகளைப் பெறலாம்.

படம் 7·15-ல் துகள் P என்ற நிலையில் இருக்கும் ஒரு கணத்தைக் கருதுவோம். P-ல் துகளின் திசைவேகம் v எனவும், A-லிருந்து அதன் உயரம் h எனவும் கயிற்றின் இழுவிசை T எனவும் கொள்வோம். படத்தில் $AN = h$, $PO = l$ கோணம் $\widehat{AOP} = \theta$ என இருக்கட்டும்.

சமன் 7·18 ன்படி,

$$v^2 = u^2 - 2g\ AC$$

$$v^2 = u^2 - 2gh \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}21$$

துகளின் வட்ட இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\theta$$

$$\therefore \quad T = \frac{mv^2}{l} - mg\cos\theta$$

ஆனால், $\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{l-h}{l}$

$$v^2 = u^2 - 2gh$$

$$\therefore \quad T = \frac{m}{l}\left[u^2 + g \quad -3h)\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 7{\cdot}22$$

சமன்பாடுகள் 7·21, 7·22 முறையே P-ல் துகளின் திசை வேகத்தையும் கயிற்றின் இழுவிசையையும் கொடுக்கின்றன.

இனி,

1. துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றிவருவதற்குரிய நிபந்தனை

துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் இயங்கவேண்டுமாயின் அது வட்டத்தின் உச்சியை (B) அடையுமுன்,

(i) அதன் திசை வேகம், (v) சுழியாகக் கூடாது.

(ii) கயிற்றின் இழுவிசை (T) எதிர்குறியுடையதாக ஆகக் கூடாது.

சமன்பாடுகள் 7·21, 7·22-ல் $h = 2l$ எனப் பதிலீடு செய்வோமாயின், B-ல் துகளின் திசை வேகத்தையும் (V_B) கயிற்றின் இழுவிசை (T_B) யையும் பெறலாம்.

அதாவது, $V_B^2 = u^2 - 4gl$

$$T_B = \frac{m}{l}(u^2 - 5gl)$$

எனவே, B-ல், T_B எதிர்குறியுடையதாகாமல் இருக்க,

$$u^2 < 5gl$$

மேற்கூறிய நிபந்தனைப்படி, B-ல் V_B யும் சுழியாகாது.

எனவே, $u^2 = 5gl$ என்றால் துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சற்றே சுற்றிவரும்.

மேலும், $u^2 = 5gl$ என்றால், சமன் 7·22-ன்படி A-ல் கயிற்றின்

இழுவிசை $= \frac{m}{l}\left[5gl + gl\right] = 6\ mg$

எனவே, கயிற்றின் இழுவிசை குறைந்தது துகளின் எடையைப் போல் ஆறுமடங்கு இருக்கவேண்டும்.

2. துகள் அலேவியக்கம் பெறுவதற்குரிய நிபந்தனே : கயிற்றின் இழுவிசை சுழியாகுமுன்னரே துகளின் திசைவேகம் சுழியாகு மாயின், துகள் அலேவியக்கம் பெறும்.

சமன் 7.21-லிருந்து, துகளின் திசைவேகம் சுழியாகும்போது, A-லிருந்து அதன் உயரம் $h_1 = \frac{u^2}{2g}$ 7.23

சமன் 7.22-லிருந்து, கயிற்றின் இழுவிசை சுழியாகும்போது துகளின் உயரம் $h_2 = \frac{u^2+gl}{3g}$ 7.24

எனவே, துகள் அலேவியக்கம் பெறுவதற்குரிய நிபந்தனே

$$h_1 < h_2$$

அதாவது, $\frac{u^2}{2g} < \frac{u^2+gl}{3g}$

அல்லது $3u^2 < 2u^2 + 2gl$

அல்லது $u^2 > 2gl.$

3. வட்டத்தில் இயங்க மறுப்பதற்கு அதாவது வட்டத்தைவிட்டு விலகுவதற்குரிய நிபந்தனே

துகளின் திசைவேகம் சுழியாகுமுன், கயிற்றின் இழுவிசை சுழி யாகுமாயின் துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகும்.

எனவே, துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலக,

$$h_2 < h_1$$

அதாவது, $\frac{u^2+gl}{3g} < \frac{u^2}{2g}$

அல்லது $u^2 > 2gl.$

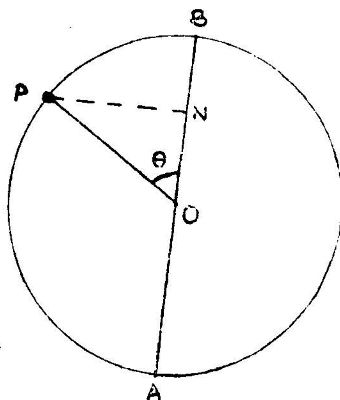
எனவே, u^2-ன் மதிப்பு $2gl$-ஐ விட அதிகமாகவும் ஆனல் $5gl$-ஐ விடக் குறைவாகவும் இருக்கவேண்டும்.

வழவழப்பான செங்குத்து வட்டம் ஒன்றின் உட்புறம் வழியே மேல்நோக்கி ஏவப்படும் ஒரு துகளுக்கும் மேற்கூறப்பட்ட நிபந்தனேகள் பொருந்தும்,ஆனல், இங்குக் கயிற்றின் இழுவிசைக்குப் பதிலாக வட்டத்தின் அழுத்தம் செயற்படும்.

மாதிரிக் கணக்கு 5. a என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான செங்குத்து வட்டம் ஒன்றின் உட்புறத்தின்வழியே, அதன் அடியி லிருந்து $\frac{1}{2}\sqrt{95ga}$ என்ற திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படு

கிறது. துகளின் திசைவேகம் $\frac{1}{5}\sqrt{15ga}$ ஆகவும் வட்டத்தின் உச்சியிலிருந்து துகளின் கோணத் தொலைவு $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ ஆகவும் இருக்கும்போது துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகும் என நிறுவுக.

துகள் P என்ற புள்ளியில் வட்டத்தைவிட்டு விலகுவதாகக் கொள்வோம். [படம் 7·16]. P-ல் துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகு



படம் 7·16

மாயின், P-ல் வட்டம் துகளின்மீது செயற்படுத்தும் அழுத்தம் சுழியாகவேண்டும். P-ல் வட்டத்தின் அடியிலிருந்து துகளின் உயரம் h என்றால் சமன் 7.24-லிருந்து,

$$h=\frac{u^2+ga}{3g}$$

ஆனால், $u^2=\frac{95}{25}ga$

$$\therefore \quad h=\left(\frac{95}{25}ga+ga\right)13g=\frac{40}{25}a$$

எனவே, P-ல் துகளின் திசைவேகம் v எனில்,

$$v^2=u^2-2gh$$

$$=\frac{95}{25}ga-2g\frac{40}{25}a$$

$$=\frac{15}{25}ga$$

$$\therefore \quad v=\frac{1}{5}\sqrt{15ga}$$

மேலும், P-ல் B-லிருந்து துகளின் கோணத்தொலைவு θ எனில்,

படம் 7·16ல் $\widehat{PON} = \theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{ON}{OP}$$

$$= \frac{h-a}{a}$$

$$= \left(\frac{40}{25}a - a\right)/a$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

எனவே, $\theta = \cos^{-1}\frac{3}{5}$.

பயிற்சி VII

1. வழவழப்பான கிடைத்தள மேசைமீது ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்ட ஓர் அடி நீளமுள்ள மீட்சியுறு கயிற்றின் மறுமுனையில் ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு, நிமிடத்திற்கு 20 முறை சுற்றுகிறது. கயிற்றின் மீட்சிக்குணகம் துகளின் எடைக்குச் சமமாயின், கயிற்றின் நீட்சி சுமார் 2 அங். எனக் காட்டுக.

2. வட்ட மேசைமீது அதன் மையத்திலிருந்து 3 அடி தொலை வில் ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேசையை அதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்தான அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றத் தொடங்கி, அதன் வேகம் சிறிது சிறிதாக அதிகப்படுகிறது. $\mu = 0{\cdot}6$ என்றால் பொருள் நழுவத் தொடங்கும்போது அதன் கோணத் திசைவேகம் என்ன : [2·53 ரேடியன்/வி.]

3. விரிக்கப்பட்டுள்ள நனைந்த குடை ஒன்று அதன் கைப்பிடி செங்குத்தாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு, அக் கைப்பிடியைப்பற்றி 33 விநாடிகளுக்கு 14 சுற்றுகள் வீதம் சுற்றப்படுகிறது. குடையின் விளிம்பு ஒரு கெஜம் விட்டமுள்ள ஒரு வட்டமாகவும் தரையி லிருந்து 4 அடி உயரத்திலும் இருக்குமாயின், விளிம்பிலிருந்து உதறப்பட்ட நீர்த்துளிகள் 5 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் தரையைத் தொடும் எனக் காட்டுக. ஒரு துளியின் நிறை 0·01 அவு. என்றால், அதனைக் குடையுடன் சேர்த்து வைத்திருப்பதற்கான

விசை சுமார் 0·021 பவுண்டல் என்றும் அவ் விசை செங்குத்து நிலைக்கு, $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது என்றும் நிறுவுக.

4. 2 பவு. எடையுள்ள குண்டையும் 100 பவு. எடை இழு விசையைத் தாங்கக்கூடிய 3 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றையும் கொண்ட ஒரு கூம்பு ஊசல், ஒரு நிமிடத்தில் பெறக்கூடிய பெருமச் சுழற்சி எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக.

$\left[400\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right]$

5. m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகள் வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையிலிருந்து h உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து l நீளமுடைய ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டு, மேசையின் மீது ஒரு வட்டத்தில் விநாடிக்கு n முறை சுற்றுமாறு செய்யப் படுகிறது. துகள் மேசைமீதே சுற்றுவதற்குரிய n ன் பெரும மதிப்பு என்ன ? $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}\right]$

6. 10 அங். நீளமுடைய புயங்களையுடைய ஓர் எளிய வேகங் காக்கும் அமைவு, நிமிடத்திற்கு 80 சுற்றுகள் வேகத்தில் சுழலு கிறது. புயங்களின் சாய்வுக் கோணத்தைக்க ணக்கிடுக. சுழற்சி வேகத்தின் சிறு மிகுதிப்பாடு சாய்வுக்கோணத்தை எவ்வாறு பாதிக்கும்? $\left[\cos^{-1}\frac{27}{5\pi^2}\right]$

7. A என்ற புள்ளியுடன் மீட்சியுறு கயிறு ஒன்றால் இணைக்கப் பட்ட ஒரு துகள் கூம்பு ஊசலாகச் சுழலுகிறது. கயிற்றின் மீட்சிக் குணகம் துகளின் எடையைப்போல் இரு மடங்கு ஆகும். கூம்பின் உயரம் l, கயிற்றின் இயல்பான நீளத்திற்குச் சமமாயின், துகளின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக. $[\sqrt{3gl}]$

8. 7·5 மைல்/மணி வேகத்தில் மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவர் ஒரு வளைவுப் பாதையில் செல்லவேண்டியுள்ளது. மிதி வண்டிக்கும் பாதைக்குமிடையே உராய்வு எண் 0·3 எனில், அவர் செல்லக்கூடிய வளைவுப்பாதையின் சிறும ஆரம் என்ன ?

[18·9 அடி]

9. மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவர் 50 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வளைவுப் பாதையில் மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறார். மிதிவண்டியின் தளம், செங்குத்து நிலையிலிருந்து எவ்வளவு சாய்ந்-

திருக்கிறது எனக் கணக்கிடுக. மிதிவண்டி நழுவாமலிருக்க மிதி வண்டிக்கும் பாதைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வு எண்ணின் சிறும மதிப்பைக் கணக்கிடுக. [7°40′, 0·1345]

10. ஓர் ஆகாய விமானம் 100 கெஜ ஆரமுள்ள ஒரு கிடைத் தள வட்டப்பாதையில், மணிக்கு 75 மைல் வேகத்தில் இயங்கு கிறது. அதன் மீது செயற்படுத்தும் காற்றழுத்தம் அதன் இறக்கை யின் தளத்திற்கு நேர்க்குத்துத் திசையில் செயற்படுகிறது எனக் கருத்திற்கொண்டு, இறக்கைகள் செங்குத்து நிலைக்குச் சாய்திருக்க வேண்டிய கோணத்தைக் கணக்கிடுக. [32·16′]

11. ஓர் இரயில் வண்டி 900 அடி ஆரமுள்ள ஒரு பாதையில் மணிக்கு 40 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. இரயில் பெட்டியின் கூரையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள l அடி நீளமுள்ள ஒரு தூக்கு நூற்குண்டின் விலகு கோணத்தைக் கணக்கிடுக. குண்டின் நேர்க்கோட்டு இடப்பெயர்ச்சியையும் கணக்கிடுக. [6°49′]

12. வழவழப்பான செங்குத்து வட்டம் ஒன்றின் உட்புறத்தின் வழியே, அடியிலிருந்து $9\sqrt{3}$ அடி/வி.வேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப் படுகிறது. அது கீழே விழுமுன் சென்ற பெரும உயரத்தைக் கணக் கிடுக. [3 அடி]

13. ஒரு பாலத்தின் கீழமைந்த 63 அடி ஆரமுடைய வட்ட வில்லின் வடிவிலமைந்த சாலைவழியே 1டன் நிறையுள்ள ஒரு கார் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. வட்டவில்லின் தாழ்ந்த புள்ளியில் காருக்கும் சாலைக்கும் இடையேயுள்ள எதிர் விசையைக் கணக்கிடுக. [1·96 டன் எடை]

14. a என்ற ஆரத்தைவுடைய வழவழப்பான வட்டவளையத் தின்உட்புறத்தின் வழியே அதன்அடி (O) யிலிருந்து $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$ என்ற திசை வேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படுகிறது. அத் துகள் $\frac{3a}{2}$ உயரத்தை அடைந்த பின்னர், வட்டத்தைவிட்டு விலகி, மீண்டும் ஏவுதானத்தை அடைகிறது எனக் காட்டுக.

15. ஓர் ஆற்றின்மீதுள்ள பாலத்தின்வழியே செல்லும் சாலை 50 அடி ஆரமுள்ள வட்டவில்லின் வடிவிலுள்ளது. அதன் வழியே செல்லும் விசை மிதி வண்டி motor cycle) ஒன்று சாலையின் உச்சிப் புள்ளியில் தரையை விட்டு விலகாமல் செல்லக்கூடிய பெரும வேகத் தைக் கணக்கிடுக. $\left[27\frac{3}{11}\right.$ மைல்/மணி$\left.\right]$

16. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றால் தொங்க விடப்பட்டுள்ள எடைமிக்க துகள் ஒன்று $\sqrt{2gh}$ என்னும் கிடைத்தள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. hன் மதிப்பு a, $\frac{5a}{2}$ ஆகியவற்றிற்கிடையே இருப்பின், கயிறு தளரும் என்றும் தாழ்ந்த புள்ளியில் இருந்து துகள் அடையும் பெரும உயரம் $(4a-h)(a-2h)$ 27a என்றும் காட்டுக.

17. a என்ற ஆரத்தையுடைய வழுவழுப்பான நிலையான கோளத்தின் உச்சியில், ஓய்விலிருந்து ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. அது கோணத்தைவிட்டு விலகும் இடத்தைக் காண்க. துகளானது கோளத்தின் அடிவழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தைச் செங்குத்து விட்டத்திலிருந்து $5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})a/27$ என்னும் தொலைவில் வந்து அடையும் எனக் காட்டுக.

18. AB என்பது O-ஐத் தாழ்ந்த புள்ளியாகக்கொண்ட ஒரு செங்குத்து வட்டத்தின் கிடைத்தள விட்டம். m என்ற நிறையை யுடைய ஒரு துகள் வட்டத்தின் உட்புறத்தின்வழியே A-லிருந்து புறப்பட்டு O-ல் வைக்கப்பட்டுள்ள $m_1(>m)$ என்ற நிறையுடன் மோதுகிறது. இரு பொருள்களும் முழு மீட்சியுடையனவாக இருப்பின், அவை செல்லும் உயரங்களைக் கணக்கிடுக. வட்டத்தின் ஆரம் $= a$

$$\left[\frac{4m^2a}{(m+m^1)^2}, \frac{a(m-m^1)}{(m+m^1)^2}\right]$$

8. சீரிசை இயக்கம்
(Simple Harmonic motion)

இழுத்துப் பொருத்தப்பட்ட கம்பி, திருகுச்சுருள் வில்லிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட ஓர் எடை, இசைக் கவையின் புயங்கள்போன்ற பொருள்களை அவற்றின் சம நிலையிலிருந்து சிறிது அசைத்து விட்டால், அவை முன்னும்பின்னும் இயங்குகின்றன. அவ்வாறு முன்னும் பின்னும் அசையும் ஒரு பொருளின் முடுக்கம் அதன் சம நிலையை எப்போதும் நோக்கியிருப்பதோடு, அச் சமநிலையிலிருந்து அதன் தொலைவுக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும். பொருள்களின் இத் தகைய இயக்கம் இசைச் சுரங்களை உருவாக்குவதால் அதனைச் சீரிசை இயக்கம் என அழைக்கலாம். சீரிசை இயக்கத்தைப் பின் வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

ஒரு துகளின் முடுக்கம் எப்பொழுதும் அதன் இயக்கப் பாதையில் ஒரு புள்ளியை நோக்கியும், அப் புள்ளியிலிருந்து அதன் இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர் விகிதத்திலும் அமையுமாயின், அத் துகளின் இயக்கம் சீரிசை இயக்கம் எனப்படும்.

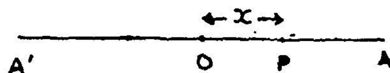
துகளின் பாதையில் O என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து அதன் இடப்பெயர்ச்சி x என்றால் துகளின் முடுக்கம்-

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}1$$

w என்பது ஒரு மாறிலி; கோணத் திசைவேகத்தின் அலகினை யுடையது; எதிர்குறி x அதிகமாகும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் முடுக்கம் செயற்படுகிறது என்பதைக் குறிக்கிறது. இந்த நுண் வகைச் சமன்பாடு, சீரிசை இயக்கத்தின் அடிப்படைச் சமன்பாடு ஆகும். சமன் 8·1-ல் x என்பது எவ்வித இடப்பெயர்ச்சியையும் குறிக்கும். அது நேர்க்கோட்டு இடப்பெயர்ச்சியாகவோ, கோண இடப்பெயர்ச்சியாகவோ இருக்கலாம்.

நேர்க்கோட்டில் சீரிசை இயக்கம் :

படம் 8·1-ல் O என்பது A'OA என்ற நேர்க்கோட்டில் ஒரு நிலையான புள்ளியாகும். P என்பது அக் கோட்டில் O-ஐப் பற்றிச்



படம் 8·1

சீரிசை இயக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு துகளாகும். $OP = x$ என்றால், O-ஐ நோக்கித் துகளின் முடுக்கம்.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x$$

அல்லது $$\frac{dv}{dt} = -w^2x$$

அல்லது $$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -w^2x$$

$$\therefore \quad v\frac{dv}{dx} = -w^2x$$

அல்லது $$v\,dv = -w^2x\,dx \qquad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}2$$

சமன் 8·2-ன் தொகுதி காணின்,

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{w^2x^2}{2} + C;$$ C என்பது ஒரு மாறிலி.

இனி $v = 0$ என்னும்போது $x = a$ என்றால்

$$C = \tfrac{1}{2}w^2a^2$$

எனவே, $$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$$

அல்லது $$v = w\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}3$$

சமன் 8·3 துகளின் இடப்பெயர்ச்சி (x)யின் எந்த மதிப்புக்கும் உரிய திசை வேகத்தின் மதிப்பைத் தருகிறது. x-ன் பெருமமதிப்பு A ஆகும். O-விலிருந்து இடப்பெயர்ச்சியின் இந்தப் பெருமமதிப்பு. சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சு (amplitude) எனப்படும். $x = \pm a$ என்றால், $v = 0$ ஆகும். படம் 8·1-ல் $OA = a = OA'$ என்றால் துகள் A, A' ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கிடையே, முன்னும் பின்னும் இயங்கும். $x = 0$ என்னும்போது, அதாவது துகள் O-ல் இருக்கும் போது, துகளின் திசைவேகம் பெருமமாகும். திசை வேகத்தின் பெரும மதிப்பு $v_m = aw$. மேலும், சமன் 8·1-லிருந்து $x = \pm a$ என்னும்போது, அதாவது துகள் கோடி நிலைகளில் (A, A') இருக்கும்

போது, முடுக்கம் பெரும மதிப்பைப் பெறும். முடுக்கத்தின் பெரும மதிப்பு $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_m = \pm w^2a$

எந்தவொரு கணத்திலும் (t) இடப்பெயர்ச்சி (x)ன மதிப்பைச் சமன் 8·3-லிருந்து பின்வருமாறு பெறலாம்; சமன் 8 3-ல் $v = \frac{dx}{dt}$ எனப் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$\frac{dx}{dt} = w\sqrt{a^2 - x^2}$$

அல்லது $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = wdt$ ... ... 8·4

சமன் 8·4-ன் தொகுதி காணின்

$$\sin^{-1}\frac{x}{a} = wt + C_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}5$$

C_1 என்பது ஒரு மாறிலி; அதன் மதிப்பு துகளின் எந்த நிலையிலிருந்து நேரம் கணக்கிடப்படுகிறது என்பதைப் பொறுத்தது. துகள் A-ல் இருக்கும் கணத்திலிருந்து நேரம் கணக்கிடப்படுமாயின், t = 0 என்னும்போது $x = a$ ஆகும்.

எனவே, $\frac{\pi}{2} = C_1$

$$\therefore \quad \sin^{-1}\frac{x}{a} = wt + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a} = \sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) = \cos wt$$

$$\therefore \quad x = a\cos wt \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}6$$

மாறாகத் துகள் 0-ல் அதாவது அதன் சமநிலையில் இருக்கும் கணத்திலிருந்து நேரம் கணக்கிடப்படுமாயின், t = 0 என்னும்போது $x = 0$ ஆகும்.

எனவே, $C_1 = 0$

$$\therefore \quad \sin^{-1}\frac{x}{a} = wt$$

$$x = a\sin wt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}7$$

சமன்பாடுகள் 8·6 அல்லது 8·7-ல் t-ன் மதிப்பை $\frac{2\pi}{w}$ அளவு அதிகரித்தாலும், x-ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை. [ஏனெனில், cos (wt + 2π)

$=\cos\ wt;\ \sin\ (wt+2\pi)=\sin\ wt]$ எனவே, $\frac{2\pi}{w}$ க்குச் சமமான அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளின் இறுதியில், துகள் ஒரே நிலையில் இருப்பதோடு அதே திசை வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் பெற்றிருக்கும். $\frac{2\pi}{w}$ என்ற கால இடைவெளி சீரிசை இயக்கத்தின் அலைவு நேரம் (T) எனப்படும். அதாவது,

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}8$$

சமன் 8·8-லிருந்து துகளின் அலைவு நேரம் சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சைச் சார்ந்ததன்று என்பது தெளிவாகிறது. மேலும்,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x$$

என்னும் சமன்பாட்டில் $x=l$ என்றால்

$\frac{d^2x}{dt^2} = w^2$ {எதிர்குறி முடுக்கத்தின் திசை இடப் பெயர்ச்சியின் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் உள்ளது என்பதை மட்டும் குறிப்பதால்

எனவே, w^2 என்பது துகளின் ஓரலகு இடப் பெயர்ச்சிக்கு அதில் ஏற்படும் முடுக்கமாகும்.

ஆகவே, $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{w^2}}$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{1}{\text{ஓரலகு இடப் பெயர்ச்சிக்கு முடுக்கம்}}} \quad 8{\cdot}9$$

மேலும், சீரிசை இயக்கத்தின் அடுக்கம்.

$$n = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 8.10$$

சீரிசை இயக்கத்தின் கலை : சமன்பாடு 8·5-ல் அதாவது,

$$\sin^{-1}\frac{x}{a} = wt + C_1$$

என்னும் சமன்பாட்டில் C_1-ன் மதிப்பு துகளின் எந்த நிலையிலிருந்து நேரக் கணக்கீடு தொடங்குகிறது என்பதைப் பொறுத்ததாகும் என்று கூறப்பட்டது. இப்பொழுது துகளானது கோடி நிலையிலிருந்த பின்னர் t' விநாடிகளின் இறுதியிலிருந்து நேரக் கணக்கீடு தொடங்குவதாகக் கொள்வோம். எனவே, $t = -t'$ என்னும் போது $x=a$ ஆகும். இம் மதிப்புகளைச் சமன் 8.5-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$\frac{\pi}{2} = -wt' + C_1$$

அல்லது $$C_1 = wt' + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2} = wt + wt'$$

$wt' = \varepsilon$ என்றால்,

$$\cos^{-1}\frac{x}{a} = wt + \varepsilon$$

$$\therefore \quad x = a\cos(wt+\varepsilon) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}10$$

சமன் 8·10-ல் ε என்பது தொடக்க கட்டம் (epoch) எனப் படும்.

மேலும், துகளானது t o என்ற கணத்தில் x-ன் பெரும நேர் மதிப்பைப் (maximum positive value = + a) பெற்றிருக்குமாயின்,

$$wto + \varepsilon = 0$$

அல்லது $\varepsilon = -wto.$

எனவே, சமன் 8·10-ஐ

$$x = a\cos(wt - wto)$$

அல்லது, $x = a\cos w\,(t - to) \ldots\ldots\ldots 8{\cdot}11$

என எழுதலாம்.

சமன் 8·11-ல் (t−to) என்பது சீரிசை இயக்கத்தின் கட்டம் (phase எனப்படும். (t − to) என்பது துகளானது கோடி நிலையை நேர்த்திசையில் கடந்த கணத்திலிருந்து ($x = +a$ என்னும் கணம்) குறிப்பிட்ட கணம் (t) வரை கடந்த காலமாதலால், சீரிசை இயக்கத்தின் கட்டத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் சீரிசை இயக்கத்தின் கட்டம் என்பது துகள் அதன் கோடி நிலையின் வழியே, நேர்த்திசையில் கடந்த கணத்தி லிருந்து அக் குறிப்பிட்ட கணம் வரை கழிந்த காலமாகும்.

மேலும், $to = -\frac{\varepsilon}{w}$ ஆதலால், t கணத்தில் கலை

$$t - to = t + \frac{\varepsilon}{w} = \frac{wt + \varepsilon}{w}$$

எனவும் எழுதலாம்.

இரு துகள்கள் வெவ்வேறு வீச்சுக்களையும் (a_1, a_2) தொடக்க நிலை களையும் $\varepsilon_1, \varepsilon_2$) ஆனால் ஒரே அலைவு நேரத்தையும் $\left(\frac{2\pi}{w}\right)$ கொண்ட சீரிசை இயக்கங்களை மேற்கொள்ளுமாயின், ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் அவற்றின் இடைப் பெயர்ச்சிகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$x_1 = a^1\cos(wt + \varepsilon_1)$$

$$x_1 = a_2\cos(wt + \varepsilon_2)$$

$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{w}$ என்பது அவ் விரு இயக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள கட்ட வேறுபாடு ஆகும். $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ எனில், இரு இயக்கங்களும் ஒத்த கட்டமுடையன என்றும் $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \pi$ என்றால், அவை எதிர் கட்டங்களையுடையன எனவும் கூறப்படும்.

சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டுள்ள ஒரு துகளின் ஆற்றல்: சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டுள்ள ஒரு துகளின் நிறை m என்றால், அதன் இடப் பெயர்ச்சி x என்னும்போது அதன்மீது செயற்படும் விசை $F = m\frac{d^2x}{dt^2} = mw^2x$

துகள் இவ் விசையை எதிர்த்து மேலும் dx என்ற இடப் பெயர்ச்சியைப் பெறுமாயின் செய்யப்பட்ட வேலை,

$$dw = Fdx = mw^2xdx.$$

எனவே துகள் x என்ற இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்போது செய்யப் படும் வேலை $w = \int dw = \int_0^x mw^2xdx$

$$= \frac{mw^2x^2}{2}$$

இது துகள் x என்ற இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்போது அதன் நிலையாற்றலாகும்.

அடுத்து, அந் நிலையில் துகளின் திசைவேகம்,

$$\frac{dx}{dt} = w\sqrt{a^2 - x^2}$$

ஆதலால், இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$$= \frac{mw^2(a^2 - x^2)}{2}$$

எனவே, துகளின் மொத்த ஆற்றல்,

$$= \frac{1}{2}mw^2(a^2 - x^2) + \frac{1}{2}mw^2x^2$$
$$= \frac{1}{2}mw^2a^2$$

மேலும், $T = \frac{2\pi}{w}$

அல்லது, $w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ ஆதலால்

துகளின் மொத்த ஆற்றல் $= \frac{1}{2}4\pi^2.m.n^2a^2$

$$= 2\pi^2mn^2a^2$$

ஆகவே துகளின் மொத்த ஆற்றல் $= mw^2a^2 = 2\pi^2 ma^2 n^2$ ....8·12

சமன் 8·12-லிருந்து துகளின் ஆற்றலானது இடப்பெயர்ச்சியின் மதிப்பைச் சார்ந்திராமல், எந்தக் கணத்திலும் ஒரே மதிப்பைக் கொண்டுள்ளது என்றும், ஆனால் வீச்சின் மதிப்பையும் அடுக்கத்தின் மதிப்பையும் சார்ந்திருக்கிறது என்றும் தெளிவாகிறது.

சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுப்பு :

1. ஒரே நேர்க் கோட்டில் உள்ள ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட இரு சீரிசை இயக்கங்கள் : அவ் விரு இயக்கங்களின் வீச்சுகள் a_1, a_2; தொடக்க நிலைகள் முறையே ε_1, ε_2; ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் இடப்பெயர்ச்சிகள் முறையே x_1, x_2 என்றால்,

$$x_1 = a_1 \cos(wt+\varepsilon_1)$$
$$x_2 = a_2 \cos(wt\ \varepsilon_2)$$

இவ் விரு இடப்பெயர்ச்சிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருப்பதால் அவற்றின் தொகுபயனும் அதே நேர்க்கோட்டில்தான் இருக்கும். தொகு பயன் x எனில்,

$$\begin{aligned} x &= x_1+x_2 \\ &= a_1\cos(wt+\varepsilon_1) + a_2\cos(wt+\varepsilon_2) \\ &= \cos wt\,(a_1\cos\varepsilon_1 = a_2\cos\varepsilon_2) - \\ &\quad \sin wt\,(a_1\sin\varepsilon_1 + a_2\sin\varepsilon_2) \end{aligned}$$

$$a_1\cos e_1 + a_2\cos\varepsilon_2 = a\cos\varepsilon \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}12$$

$$a_1\sin\varepsilon_3 + a_2\sin\varepsilon_2 = a\sin\varepsilon \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}13$$

என்றால், $x = a\cos wt\cos\varepsilon - a\sin wt\sin\varepsilon$

$$= a\cos(wt+\varepsilon) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 8{\cdot}14$$

சமன் 18·14, a-ஐ வீச்சாகவும் ε-ஐத் தொடக்க நிலையாகவும் $\frac{2\pi}{w}$-ஐ அலைவு நேரமாகவும்கொண்ட ஒரு சீரிசை இயக்கமாகும். எனவே, எடுத்துக்கொண்ட இரு சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுபயனும் ஒரு சீரிசை இயக்கமே.

சமன் 8·12, 8·13-லிருந்து

$$a = \sqrt{[a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\varepsilon_1-\varepsilon\ )]} \quad \ldots \quad \ldots \quad 8.15$$

$$\tan\varepsilon = \frac{a_1\sin\varepsilon_1 + a_2\sin\varepsilon_2}{a_1\cos\varepsilon_1 + a_2\cos\varepsilon_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad 8.16$$

சமன்பாடுகள் 8·15, 8·16 தொகுபயன் சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சையும், தொடக்க நிலையையும் தருகின்றன.

சிறப்பு நேர்வுகள்

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ என்றால் $\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 1$

எனவே, $a = a_1 + a_2 \quad \tan\varepsilon = \tan\varepsilon_1; \ \varepsilon = \varepsilon_1$

அதாவது, தொகுபயன் சீரிசை இயக்கம் ஆக்கக் கூறுகளின் தொடக்க நிலையையே கொண்டுள்ளது. அதன் வீச்சு ஆக்கக் கூறுகளின் வீச்சுகளின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

2. $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \pi$ என்றால் $\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 1$

எனவே, $a = a_1 - a_2 \quad \tan\varepsilon = \tan\varepsilon_1 = \tan\varepsilon_2; \ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

அதாவது, தொகுபயன் சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சு ஆக்கக் கூறுகளின் வீச்சுகளின் வேறுபாட்டிற்குச் சமம்; தொடக்கநிலை ஆக்கக் கூறுகளின் தொடக்கநிலைக்குச் சமமாகும்.

ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக உள்ள ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட இரு சீரிசை இயக்கங்கள் : அவ் விரு இயக்கங்களும்

$$x = a\cos\omega t \qquad \ldots 8{\cdot}17$$

$$y = b\cos(\omega t + \varepsilon) \qquad \ldots 8{\cdot}18$$

என்னும் சமன்பாடுகளால் குறிக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம்.

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$= \cos\omega t\cos\varepsilon - \sin\omega t\sin\varepsilon$$

ஆனால், சமன் 8·17-லிருந்து $\cos\omega t = \frac{x}{a}; \ \sin\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

எனவே, $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\varepsilon - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\varepsilon$

இருமடி காணில்,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\cos^2\varepsilon - \frac{2xy}{ab}\cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

அல்லது $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon \qquad \ldots\ldots\ldots 8{\cdot}19$

சமன் 8·19 x,y அச்சுகளுடன் சாய்ந்த அச்சுகளையுடைய நீள்வட்டத்திற்குரிய பொதுவான சமன்பாடாகும். எனவே, தொகுபயன் இயக்கம் ஒரு நீள் வட்டமாகும்.

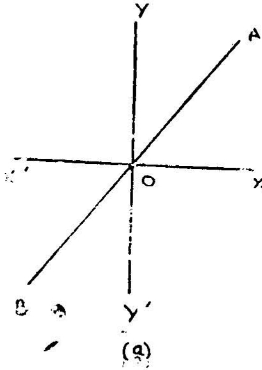
சிறப்பு நேர்வுகள்

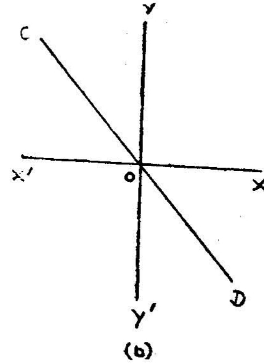
1. $\varepsilon = O$ என்றால், $\sin \varepsilon = O$ $\cos \varepsilon = 1$

$$\therefore \qquad \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)^2 = O$$

அல்லது $\qquad \dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a}$ ஒரு மாறிலி.

இந்தச் சமன்பாடு ஆயங்களின் தொடக்கம் வழியாகச் செல்லும் நேர்வாட்டத்தைக்கொண்ட ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது. எனவே, தொகுபயன் இயக்கம் படம் 8·2a-ல் காட்டியுள்ளபடி.





படம் 8·2

AB என்ற நேர்க்கோட்டில் அமையும்.

2. $\varepsilon = \pi$ என்றால் $\cos \varepsilon = -1$ $\sin \varepsilon = O$

எனவே, $\left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{x}{a}\right)^2 = O$

அல்லது $\qquad \dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a}$

அல்லது $\qquad \dfrac{y}{x} = -\dfrac{b}{a}$

இச் சமன்பாடு ஆயத் தொடக்கத்தின் வழியே செல்லும் எதிர் வாட்டத்தைக்கொண்ட ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது. எனவே, தொகுபயன் இயக்கம் படம் 8·2b-ல் காட்டியபடி உள்ள CD என்ற நேர்க்கோட்டில் அமைகிறது.

3. $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ என்றால் $\cos \varepsilon = 0 \quad \sin \varepsilon = 1$

எனவே, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$

இது ஆக்கக் கூறுகளின் திசைகளோடு ஒன்றிய அச்சுகளைக் கொண்ட நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கிறது.

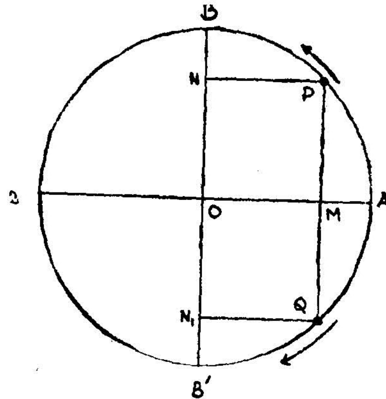
4. $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$; $a = b$ என்றால்

$$x^2 + y^2 = a^2$$

இச் சமன்பாடு a-ஐ ஆரமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டத்தைக் குறிப்பதால், தொகுபயன் இயக்கம் ஒரு வட்ட இயக்கமாகும். எனவே, நேர்குத்துத் திசைகளில் உள்ள இரு சமமான சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுபயன் இயக்கம், ஒரு வட்ட இயக்கமாகும். மறுதலையாக எந்தவொரு வட்ட இயக்கத்தையும் நேர்குத்துத் திசைகளில் உள்ள இரு சமமான சீரிசை இயக்கங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

இரண்டு சமமான எதிரான வட்ட இயக்கங்களின் தொகுப்பு

P, Q என்ற துகள்கள் a என்ற ஆரத்தையுடைய வட்டத்தில் A என்ற புள்ளியிலிருந்து தொடங்கிச் சீரான கோணத்திசை வேகத்



படம் 8·3

துடன் எதிர்த் திசைகளில் இயங்குவதாகக் கொள்வோம். அவை புறப்பட்ட கணத்திலிருந்து t நேர இறுதியில் அவற்றின் நிலைகள் P, Q என இருக்கட்டும். [படம் 8·3].

இனி, P-ன் இயக்கத்தை A'OA, BOB' ஆகிய நேர்குத்துத் திசைகளில் முறையே M, N ஆகியவற்றின் சீரிசை இயக்கங்களாகப் பிரிக்கலாம். அவ் விரு சீரிசை இயக்கங்களையும்

$$x_1 = a \cos wt$$
$$y_1 = a \sin wt$$

என்னும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும்.

அவ்வாறே, Q-ன் இயக்கத்தையும் அவ் விரு திசைகளில் முறையே M, N_1 ஆகியவற்றின் சீரிசை இயக்கங்களாகப் பிரிக்கலாம். அவ் விரு சீரிசை இயக்கங்களையும்

$$x_2 = a \cos wt$$
$$y_2 = -a \sin wt$$

என்னும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும்.

A'OA என்னும் திசையில் உள்ள சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுபயன் $x = x_1 + x_2 = 2a \cos wt$ ... ... 8·20

BOB' திசையில் உள்ள சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுபயன்

$y = y_1 + y_2 = O$ ... ... 8·21

எனவே, இரு வட்ட இயக்கங்களின் தொகுபயன் = மேற்கூறப் பட்ட இரு தொகுபயன்களின் தொகுபயன்.

சமன் 8·2 A'OA திசையில் ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிப்பதால்,குறிப்பிட்ட இருவட்ட இயக்கங்களின் தொகுபயன் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகும். சீரிசை இயக்கத்தின் நேரம் வட்ட இயக்கங்களின் வீச்சைப்போல் இருமடங்கு.

மறுதலையாக A'OA என்ற ஒரு நேர்க்கோட்டில் உள்ள ஒரு சீரிசை இயக்கத்தை அந்தக் கோட்டை விட்டமாகக்கொண்ட வட்டத்தில் A-விருந்து தொடங்கி எதிர்த்திசைகளில் அதே சீரான கோணத்திசை வேகத்துடன் இயங்கும் இரு சமமான எதிரான வட்ட இயக்கங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

சில சீரிசை இயக்கங்கள்

1. மீட்சியுறு கம்பிகளின் இயக்கங்கள்

ஒரு முனை பொருத்தப்பட்ட l நீளமுடைய ஒரு நெகிழ்வுறு கம்பி அல்லது திருகுச்சுருள்வில் இழுக்கப்படும்போது அதில் உண்டாகும் நீட்சி, இழுவிசை ஆகியவை முறையே x, T என்ருல்,

$$T = \frac{E}{l} x$$ (சமன் 4·1) E என்பது கம்பியின் மீட்சிக் குணகம்.

a. செங்குத்து அலைவுகள் : மேல்முனை பொருத்தப்பட்ட l என்ற இயல்பான நீளமுடைய ஒரு மீட்சியுறு கம்பியின் கீழ்முனையில் m என்ற நிறையை யுடைய ஒரு துகள் தொங்கவிடப்பட்டிருப்ப தாகக் கொள்வோம். படம் 8·4-ல் OA கம்பி யின் இயல்பான நீளத்தையும் OB துகள் தொங்கவிடப்பட்டபின் உள்ள நீளத்தையும் குறிக்கின்றன. படத்தில் AB=a என இருக் கட்டும். எனவே, கம்பியின் இழுவிசை

$$T = \frac{E}{l} a \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad 8{\cdot}22$$

மேலும், துகள் சம நிலையிலிருப்பதால்

$$T = mg$$

எனவே,

$$\frac{Ea}{l} = mg \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad 8{\cdot}23$$

படம் 8·4

இப்பொழுது துகளைச் சிறிது செங்குத்தாக இழுத்துவிடுவோமாயின், அது மேலும் கீழும் இயங்கும். ஏதோவொரு கணத்தில் துகளின் நிலையை C என்ற புள்ளி இருப்பதாகக் கொள்வோம்; BP=x என இருக்கட்டும்.

இந் நிலையில் கம்பியின் இழுவிசை

$$T_1 = \frac{E}{l}(a+x)$$

துகளின்மீது மேல்நோக்கிச் செயற்படும்.

$$\text{தொகுபயன் விசை} = T_1 - mg$$

$$= \frac{E}{l}(a+x) - \frac{Ea}{l}$$

$$= \frac{Ex}{l}$$

இவ் விசை துகளை அதன் சமநிலைக்கு மீட்க முயலும்; எனவே அது மீட்பு விசை (restoring force) எனப்பெறும்.

$$\text{மீட்பு விசை} = \frac{Ex}{l} = \text{துகளின் நிறை} \times \text{முடுக்கம்.}$$

$$= m \times \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{E}{ml}.x \qquad \dots \quad \dots \quad 8{\cdot}24$$

எதிர்குறியானது மீட்புவிசை. எனவே, முடுக்கம் எப்போதும் துகளின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு எதிர்த்திசையில் செயற்படுகிறது என்பதைக் குறிக்கிறது.

சமன் 8·24-ல் $\frac{E}{ml}$ ஒரு மாறிலியாதலால் அச் சமன்பாடு ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்கும். எனவே, துகளும் கம்பியும் ஒரு சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்ளும்.

$$\text{அலைவு நேரம் } T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\text{ஓரலகுஇடப்பெயர்ச்சிக்கு முடுக்கம்}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{E}}$$

b. மீட்சியுறு கம்பியின் கிடைத்தள அலைவுகள் : வழவழப்பான கிடைத்தள மேசை ஒன்றின்மீது, O என்ற புள்ளியில் ஒரு முனை பொருத்தப்பட்ட l நீளமுள்ள ஒரு மீட்சியுறு கம்பியில், m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகள் பொருத்தப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

படம் 8·5-ல் OA = l. துகளை OA வழியாக B என்ற புள்ளிக்கு இழுத்துவிடுவதாகக் கொள்வோம். துகள் OB வழியே சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது என நிறுவலாம். துகள் P என்ற



படம் 8·5

புள்ளியில் இருக்கும் ஒரு கணத்தைக் கருதுவோம். AP = x என்றால், அந்தக் கணத்தில் கம்பியில் உருவாகும் இழுவிசை,

$$T = \frac{E}{l}x$$

இந்த இழுவிசையானது துகளை அதன் சமநிலைக்கு மீட்க முயல்வால், மீட்பு விசை $\frac{E}{l} = -m\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{E}{ml}x \qquad \dots \quad \dots \quad 8{\cdot}25$$

சமன் 8·25 ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்கிறது. அதன் அலைவு நேரம்,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{E}}$$

மேற்கூறப்பட்ட விவாதங்கள் திருகுச் சுருள் வில்லுக்கும் பொருந்தும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் 11 விநாடிகளில் 7 அலைவுகளை மேற்கொள்ளுகிறது. அதனுடைய பெருமத் திசைவேகம் 8 அடி/வி. என்றால், அதன் பாதையின் நீளத்தையும் பெரும முடுக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

துகளின் அலைவு நேரம் $T = \frac{2\pi}{w}$

$$\therefore\ w = \frac{2\pi}{T}$$

துகளின் பெரும வேகம் $v_m = aw$

$\therefore$ துகளின் வீச்சு $a = \frac{v_m}{w}$

$$= \frac{T}{2\pi} v_m$$

இங்கு $T = \frac{11}{7}$ வி. $v_m = 8$ அடி/வி.

எனவே, $a = \frac{11}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22} \times 8$

$= 2$ அடி.

எனவே, துகள் செல்லும் பாதையின் நீளம் $= 4$ அடி.

துகளின் பெரும முடுக்கம் $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_m = aw^2$

$$= \frac{2 \times 4\pi^2}{T^2}$$

$$= 2 \times 4 \times \frac{22^2}{7^2} \times \frac{7^2}{11^2}$$

$= 32$ அடி/வி^{2}.

மாதிரிக் கணக்கு 2. ஒரு திருகுச் சுருள் வில்லில் ஒவ்வொரு பவுண்டு எடை சேர்க்கப்படும்போதும், அதன் நீளம் $\frac{1}{2}''$ அதிகமாவதாகக் காணப்பட்டது. அதன் ஒரு முனை பொருத்தப்பட்டு மறுமுனையில் 5 பவு. நிறை தொங்கவிடப்பட்டு அலைவுறும்படி செய்யப்படுகிறது. அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

வில்லின் இயல்பான நீளம் l எனக் கொள்வோம்.

ஒரு பவுண்டு எடைக்கு நீட்சி $= \frac{1}{2}$ அங்.

எனவே, வில்லுடன் 5 பவு. எடையைச் சேர்க்கும்போது,

$$\text{நீட்சி} = \frac{5}{2} \text{ அங்.} = \frac{5}{24} \text{ அடி}$$

வில்லில் இப்பொழுது இழுவிசை T, வில்லின் மீட்சிக் குணகம் E என்றால் சமன் 4·1-ன்படி,

$$T = \frac{E}{l} \cdot \frac{5}{24} \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

மேலும், 5 பவு. நிறை சமநிலையிலிருப்பதால்,

$$T = mg \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

எனவே, $\frac{E}{l} \cdot \frac{5}{24} = mg = 5 \times 32$

அல்லது $\frac{E}{l} = 32 \times 24 \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(iii)}$

நிறை அலைவியக்கம் பெறும்போது, அதன் சமநிலைக்குக் கீழ் x ஆழத்தில் அது இருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம். அந் நிலையில்

$$\text{வில்லில் மொத்த நீட்சி} = \frac{5}{24} + x.$$

$$\text{வில்லின் இழுவிசை } T_1 = \frac{E}{l}\left(\frac{5}{24} + x\right)$$

$$\text{எனவே, மீட்பு விசை } T_1 - mg = \frac{E}{l}\left(\frac{5}{24} + x\right) - \frac{E}{l}\,\frac{5}{24}$$

$$= \frac{E}{l} x$$

$$= 32 \times 24x.$$

துகளின் இயக்கத்திற்கான நுண்வகைச் சமன்பாட்டை எழுதுவோமாயின்,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\text{மீட்புவிசை}$$

$$5 \frac{d^2x}{dt^2} = -32 \times 24\, x$$

அல்லது $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{32 \times 24}{5} x$

எனவே, துகளின் அலைவு நேரம்,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{32 \times 24}}$$

$$T = \frac{\pi}{24}\sqrt{15} \text{ விநாடிகள்}$$

பயிற்சி VIII

1. ஒரு துகள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் சீரிசை இயக்கத்தைக் கொண்டுள்ளது. கோட்டின் மையத்திலிருந்து 3 அடி, 2 அடி தொலைவுகளில் துகளின் திசைவேகங்கள் முறையே 4 அடி/வி., 5 அடி/வி. ஆகும். துகளின் அலைவு நேரத்தையும் பாதை நீளத்தையும் கணக்கிடுக.

[$\frac{2}{3}\sqrt{5}\pi$ வி. $\frac{2}{3}\sqrt{161}$ அடி.]

2. சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டுள்ள ஒரு துகள், ஒரு நிமிடத்தில் 100 அலைவுகளை மேற்கொள்ளுகிறது; அதன் பெருமத் திசைவேகம் 15 அடி/வி. அதன் பெரும முடுக்கத்தையும், பாதை நீளத்தையும் கணக்கிடுக.

[50π அடி/வி^{2} $\frac{9}{\pi}$ அடி.]

3. சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் பெருமத் திசைவேகம் 2 அடி/வி. அலைவு நேரம் $\frac{1}{5}$ வி. அதன் வீச்சு $\frac{1}{5\pi}$ அடி. என நிறுவுக.

4. ஓய்விலிருந்து தொடங்கும் ஒரு பொருள் 18 விநாடிகள் அலைவுநேரமுள்ள ஒரு சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டு, 3 விநாடிகளில் 10 அங். தொலைவைக் கடக்கிறது. அதன் வீச்சு, பெருமத் திசைவேகம், 3 விநாடிகளின் இறுதியில் அதன் வேகம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

[20 அங்., $\frac{5\pi}{27}$ அடி/வி.]

5. ஒரு துகள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் சீரிசை முறையில் இயங்குகிறது. துகள் சமநிலையிலிருந்து x_1, x_2 தொலைவுகளில் இருக்கும்போது, அதன் திசைவேகங்கள் முறையே u_1, u_2 ஆகும். அதன் அலைவு நேரம் $2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{u_1^2 - u_2^2}}$ எனக் காட்டுக. அதன் பெருமத் திசைவேகத்தையும், வீச்சையும் கணக்கிடுக.

$$\left[\sqrt{\left(\frac{u_1^2 x_2^2 - u_2^2 x_1^2}{x_2^2 - x_1^2}\right)} \quad \sqrt{\left(\frac{u_1^2 x_2^2 - u_2^2 x_1^2}{u_1^2 - u_2^2}\right)}\right]$$

6. m என்ற ஒரு நிறையானது ஓர் அடி வீச்சையும் ஒரு வினாடி அலைவு நேரத்தையும் கொண்ட சீரிசைமுறையில் செங்குத்தாக இயங்கும் ஒரு தட்டில் உள்ளது. சமநிலையிலிருந்து $\frac{8}{\pi^2}$ அடி உயரத்தில் அந்த நிறை தட்டைவிட்டு விலகுகிறது என்றும், அது இறுதியாகச் சமநிலையிலிருந்து $\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{4}{\pi^2}\right)$ அடி உயரத்திற்கு எழுகிறது என்றும் காட்டுக.

7. 12 பவு. நிறையைத் தாங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு இலேசான திருகுச்சுருள் வில்லில் மேலும் 3 பவு. நிறையைச் சேர்த்த பொழுது, அதன் நீளம் 2 அங். அதிகமாகிறது. 3 பவு. நிறை திடீரென்று விலக்கப்படுமாயின், 12 பவு. எடை அலைவு நேரத்தையும் அது தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து 1 அங். மேலே இருக்கும்போது, அதன் திசைவேகத்தையும், வில்லின் இழு விசையையும் மதிப்பிடுக.

[$\frac{1}{8}\pi\sqrt{3}$ வி., 13·5 பவு. எடை]

8. இழுவிசை நீட்சிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் ஒரு திருகுச் சுருள் வில்லின் ஒரு முனையில் 2 பவு. நிறை தொங்கவிடப்பட்ட போது அதன் நீளம் 5 அங். அதிகமாகிறது. அந்த நிறை மேலும் 5 அங். கீழே இழுத்து விடப்படுகிறது. அது சம நிலையைக் கடக்கும்போது, அதன் திசை வேகத்தையும் 3 அங். எழுவதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தையும் கணக்கிடுக.

[3·652 அடி, 0·012 வி.]

9. 4 அடி இயல்பான நீளமுடைய ஒரு மீட்சியுறு கம்பியின் ஒரு முனை A என்ற நிலையான புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டு மறு முனையில் 12 பவு. நிறை ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. செங்குத்தாகத் தொங்கும் 12 பவு. நிறை கம்பியின் நீளத்தை 6 அங். அதிகமாக்கும் அளவுக்குக் கம்பியின் மீட்சிக் குணகத்தின் மதிப்பு உள்ளது. 12 பவு. நிறை A-வரை மேலே தூக்கப்பட்டுச் செங்குத்தாக விழுமாறு விடப்படுகிறது. A-லிருந்து எவ்வளவு தொலைவின்கீழ் அது ஓய்வுபெறும்? [2·55 அடி]

10. மீட்சிக் குணகம் λ, இயல்பான நீளம் a ஆகியவற்றைக் கொண்ட ஒரு மீட்சியுறு கம்பியின் ஒரு முனை வழவழப்பான கிடைத் தளம் ஒன்றில் ஒரு புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டு மறுமுனை அத்தளத்தில் அமைந்த m நிறையையுடைய ஒரு துகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துகள் நிலையான புள்ளியிலிருந்து 2a தொலைவுக்கு இழுத்து விடப்படுகிறது. துகளின் முழு அலைவு நேரம் $2(\pi+2)\sqrt{\frac{ma}{\lambda}}$ எனக் காட்டுக.

9. நிலைமத் திருப்புதிறன்
(Moment of inertia)

இப் பகுதியில் நிலையானதோர் அச்சைச்சுற்றிய திண்பொருள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றிக் கூறப்படும். மாறாத உருவமும் அளவும் கொண்ட பொருள்கள் திண்பொருள்கள் எனப்படுகின்றன. அவற்றில் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவு எப்போதும் ஒரே அளவாய் இருக்கும்.

நிலைமத் திருப்புதிறன் : திண்பொருள்களின் சுழற்சியைப்பற்றிய பாடங்களில் முக்கிய பங்குபெறுவது நிலைமத் திருப்புதிறன் என்னும் பண்பாகும். நிலைமத் திருப்புதிறன் என்றால் என்ன ? ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்க்கோட்டிலிருந்து r தொலைவில் உள்ள m என்ற நிறையை யுடைய துகள் அக் கோட்டினை அச்சாகக்கொண்டு சுழலுமாயின், துகளின் நிறை, நேர்க்கோட்டிலிருந்து அதன் தொலைவின் இருமடி ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் (mr^2) அத் துகளின் அக் கோட்டினைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் எனப்படுகிறது.

பல துகள்கள் அடங்கிய தொகுதி ஒன்றில் m_1, m_2, m_3 என்ற பல்வேறு துகள் ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்க்கோட்டிலிருந்து முறையே, r_1, r_2, r_3 என்ற தொலைகளில் இருந்தால் [படம் 9·1] அத்தொகுதியின் அக் கோட்டைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots$$
$$= \Sigma mr^2$$

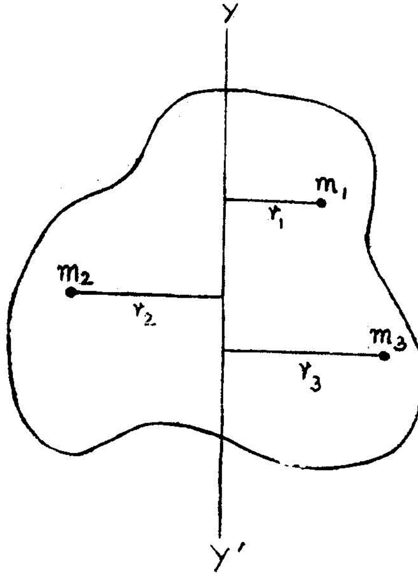
திண்பொருள்களில் எண்ணற்ற துகள்கள் தொடர்ச்சியாக அமைந்து இருப்பதால்,

$$I = \int mr^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad 9{\cdot}1$$

மேலும், பொருளின் நிறை முழுவதும் குறிப்பிட்ட ஓர் அச்சிலிருந்து K தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் செறிந்துள்ளதாகக் கற்பனை செய்வோமாயின் $MK^2 = \Sigma mr^2$ என்று ஆகும். K என்பது

பொருளின் அக்குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றிய சுழற்சி ஆரம் (radius of gyration) எனப்படும். இவ்வாறாக,

$$I = \Sigma mr = MK^{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad 9{\cdot}2$$



படம் 9.1

எனவே, ஒரு பொருளின் ஒரு குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் அதன் நிறையையும் அந்த அச்சைப் பொறுத்து எவ்வாறு அமைந்துள்ளது என்பதையும் பொறுத்துள்ளது. எனினும் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் ஒரு குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் எப்போதும் ஒரு மாருத மதிப்பையுடையது.

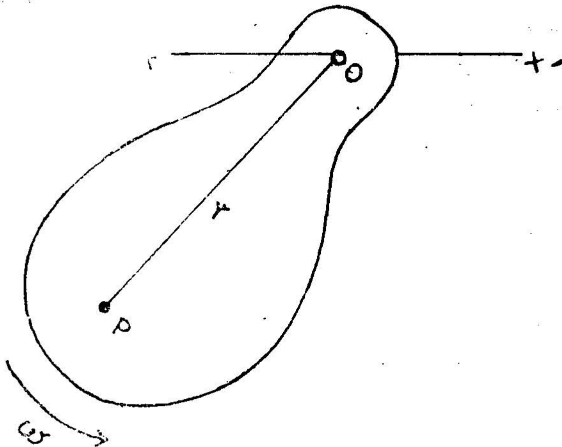
நிலைமத் திருப்புதிறனின் அலகுகள் மெட்ரிக் முறையில் கிராம்–சென்டி மீட்டர்². (கி–செ. மீ².): பிரிட்டன் முறையில்: பவுண்டு–அடி² (பவு–அடி²)

ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் திண்பொருளின் இயக்க ஆற்றல், கோண உந்தம் (angular momentum).

நிலையான ஓர் அச்சைப்பற்றிச் சுழலக்கூடிய M என்ற நிறையையுடைய ஒரு திண்பொருளைக் கருதுவோம். அதன் (a) இயக்க ஆற்றல், (b) கோண உந்தம், (c) திருப்புவிசைக்கும் கோண

முடுக்கத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு ஆகியவற்றைப்பற்றி இங்குப் பார்ப்போம்.

படம் 8·2 அத்தகைய ஒரு பொருளைக் குறிக்கிறது. பொருளானது படத்தின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாக O என்ற புள்ளி



படம் 9·2

வழியே செல்லும் ஓர் அச்சை (xox')ப்பற்றி w என்ற கோணத் திசைவேகத்துடன் சுழலுகிறது.

a. இயக்க ஆற்றல்: O-விலிருந்து r தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலுள்ள m அலகு நிறையையுடைய ஒரு துகளைக் கருதுவோம்.

அதன் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகம் $v = rw$

$\therefore$ அதன் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2w^2$

திண்பொருளைக் குறிப்பிட்ட அச்சிலிருந்து பல்வேறு தொலைவு களில் உள்ள பல்வேறு நிறைகளை உடைய துகள்களின் தொகுதி என்று கருதலாமாதலால் அதன் இயக்க ஆற்றல் அத் துகளின் மொத்த இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாகும்.

எனவே, திண்பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $= \Sigma \frac{1}{2}mr^2w^2$

எல்லாத் துகள்களும் அதே கோணத்திசை வேகத்துடன் இயங்குமாதலால்,

இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} w^2 \Sigma mr^2$

ஆனால், Σmr^2 என்பது திண்பொருளின் குறிப்பிட்ட அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன், I.

எனவே, இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} I w^2$

b. கோண உந்தம் : படம் 9·2ல் குறிப்பிட்ட அச்சிலிருந்து r தொலைவிலுள்ள m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகளின்

நேர்க்கோட்டுத் திசை வேகம் $v = rw$

$\therefore$ நேர்க்கோட்டு உந்தம் $mv = mrw$

இந்த உந்தத்தின் குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றிய திருப்புதிறன்
$= mr^2w$.

திண்பொருளிலுள்ள எல்லாத் துகள்களின் உந்தங்களின் மொத்தத் திருப்புதிறன் $= \Sigma mr^2w = I w$

ஒரு குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் ஒரு திண்பொருளில் உள்ள எல்லாத் துகள்களின் உந்தங்களின் அக் குறிப்பிட்ட அச்சைப் பற்றிய மொத்த திருப்புதிறன் பொருளின் அந்த அச்சைப்பற்றிய கோண உந்தம் எனப்படும்.

எனவே கோண உந்தம் $= I w$ ... ... 9·4

c. திருப்பு விசை (torque)க்கும் கோண முடுக்கத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு : படம் 9·2-ல் xox′ என்ற அச்சிலிருந்து r தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலுள்ள m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகளைக் கருதுவோம். அது w என்ற கோணத் திசைவேகத்துடன் இயங்குவதால், PO-க்கு நேர்குத்தான திசையில் அதன் முடுக்கம்

$$= r\frac{dw}{dt}$$

எடுத்துக்கொண்ட துகளின்மீது PO-க்கு நேர்குத்தான திசையில் செயற்படும் பயனுறுவிசை (effective force) F என்றால்

$$F = mr\frac{dw}{dt}$$

இந்த விசையின் xox′ அச்சைப்பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= mr^2\frac{dw}{dt}$$

பொருளிலுள்ள எல்லாத் துகள்களையும் கருதுவோமாயின், அவற்றின்மீது செயற்படும் பயனுறு விசைகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \Sigma\, mr^2 \frac{dw}{dt}$$

$$= I \frac{dw}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(Iw)$$

= கோண உந்தம் மாறும் வீதம்.

எனவே, ஓர் அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் ஒரு பொருளின் கோண உந்தம் மாறும்வீதம் அதன்மீது செயற்படும் பயனுறு விசைகளின் அந்த அச்சைப்பற்றிய திருப்பு திறனுக்குச் சமம். அது திருப்பு விசை எனப்படும். மேலும், $\frac{dw}{dt}$ என்பது பொருளின் கோண முடுக்கம்.

எனவே, பொருளின்மீது செயற்படும் திருப்புவிசை பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன் கோணமுடுக்கம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமமாகும். திருப்பு விசை C எனக் குறிக்கப்படின்,

$$C = I \frac{dw}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 9{\cdot}5$$

இது இயக்கத்திற்கான நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியை ஒத்திருப்பதைக் காணலாம்.

சமன்பாடு பொருள்களின் வட்டமுறை இயக்கத்திற்கான அடிப்படைச் சமன்பாடு ஆகும். இது பொருள்களின் நேர்க்கோட்டு இயக்கத்திற்கான F = ma என்ற சமன்பாட்டை ஒத்திருப்பதைக் காணலாம்.

கோண உந்த அழிவின்மை விதி : பொருளின்மீது செயற்படும் பயனுறு விசைகளின் திருப்புதிறன் சுழியாகுமாயின் அதாவது, சமன் 9·5-ல் C = O என்றால்,

$$I \frac{dw}{dt} = O$$

அல்லது $\frac{d}{dt}(Iw) = O$

அதாவது கோண உந்தம் மாறாமலிருக்கும். எனவே, பொருளின்மீது செயற்படும் புறத்திருப்பு விசை (external torque)

அதாவது புறவிசைகளின் திருப்புதிறன் சுழியாகுமாயின், பொருளின் கோண உந்தம் மாருமல் இருக்கும். இது கோண உந்த அழி வின்மை விதி எனப்படும்.

C-ஆனது மீப்பெரு மதிப்பைப்பெற்று மிகக்குறுகிய கால அள வுக்குச் செயற்படுமாயின்,

$$\int_0^t C dt$$

பொருளின்மீது செயற்படும் கோணத் தாக்கின் (angular impulse) அளவைக் குறிக்கும்.

எனவே கோணத்தாக்கு

$$= \int_0^t C dt = \int_0^t \frac{d}{dt} (I w)\ dt$$

$$= I w$$

அதாவது, ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் கோணத்தாக்கு அப் பொருளின்மீது கோண உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதலுக்குச் சமமாகும்.

சமன்பாடுகள் 9·3, 9·4, 9·5 ஆகியவற்றை நேர்க்கோட்டு இயக் கத்திற்கான இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$, உந்தம் $= mv$, $F = ma$ ஆகிய சமன்பாடுகளுடன் முறையே ஒப்புநோக்குவோமாயின் நேர்க்கோட்டு இயக்கத்தில் நிறையின் பங்கைச்சுழற்சி இயக்கத்தில் நிலைமத் திருப்புதிறன் (I) வகிக்கிறது என்பது தெளிவாகும்.

இணை யச்சுகளின் தேற்றம் : (Theorem of parallel axes)

M என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் I என்ருல் அந்த அச்சிலிருந்து 'a' தொலைவிலுள்ள மற்ருெரு இணையான அச்சைப்பற்றிய பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $I' = I + Ma^2$.

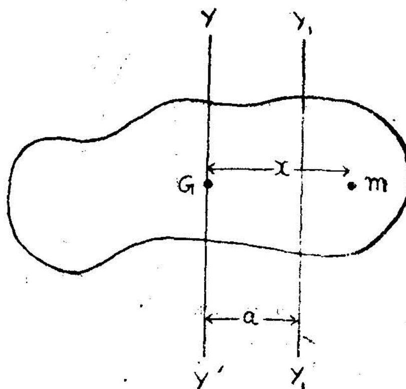
படம் 9·3-ல் G என்பது M என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருளின் புவியீர்ப் புமையம் ; yy' என்பது அதன் வழியேசெல்லும் ஓர் அச்சு ; y_1y_1' என்பது yy' க்கு இணையாக அதனின்றும் 'a' தொலைவில் அமைந்த ஓர் அச்சு.

yy'-லிருந்து x தொலைவிலுள்ள m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகளைக் கருதுவோம்.

அத் துகளின் yy' ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $= mx^2$

முழுப்பொருளின் yy'-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $I = \Sigma mx^2$.

y_1y_1'-லிருந்து துகளின் தொலைவு $= (x-a)$



படம் 9·3

$\therefore$ துகளின் y_1y_1'-ஐப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $I' = \Sigma m (x-a)^2$

$$= \Sigma mx^2 + \Sigma ma^2 - \Sigma m.\ 2ax.$$

ஆனல், $\Sigma mx^2 = I,\ \Sigma ma^2 = Ma^2$

எனவே, $I' = I + Ma^2 - \Sigma m\ 2ax.$

பொருள் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் (G) ஓர் ஊசி முனை மீது சமநிலையிலிருக்குமாதலால்,

$$\Sigma mx = 0$$

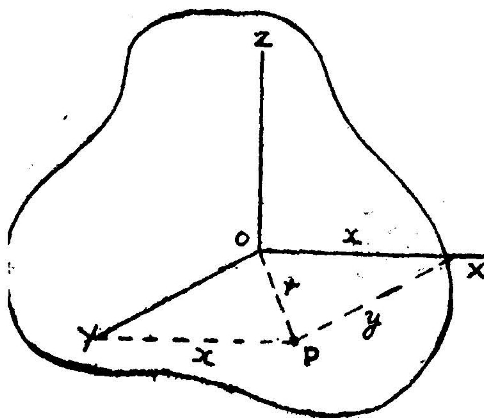
எனவே, $I' = I + Ma^2$ ... ... 9·6

நேர்குத்தச்சுக்களின் தேற்றம் : (Theorem of perpendicular axes)

ஒரு மென்தகட்டின் தளத்திலுள்ள ox, oy என்ற அச்சுகளைப் பற்றிய அத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்கள் Ix, Iy என்ருல் அவ் விரு அச்சுகளுக்கும் நேர்குத்தாயமைந்த oz என்ற அச்சைப் பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $Iz = Ix + Iy$.

படம் 9·4-ல் P என்பது மென்தகட்டின் தளத்தில் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகளைக் குறிக்கிறது ; ox, oy, oz ஆகிய அச்சுகளிலிருந்து அதன் தொலைவுகள் முறையே y, x, r எனக் கொள்வோம்.

அத் துகளின் OZ-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்,



படம் 9·4

$$mr^2 = m\,(x^2 + y^2)$$
$$= mx^2 + my^2$$

எனவே, மென்தகட்டின் OZ-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$Iz = \Sigma mr^2 = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$$

ஆனால், Σmx^2 = மென்தகட்டின் OY-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் (Ix)

Σmy^2 = மென்தகட்டின் Ox-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் (Iy)

எனவே, $Iz = Ix + Iy$ ... ... 9·7

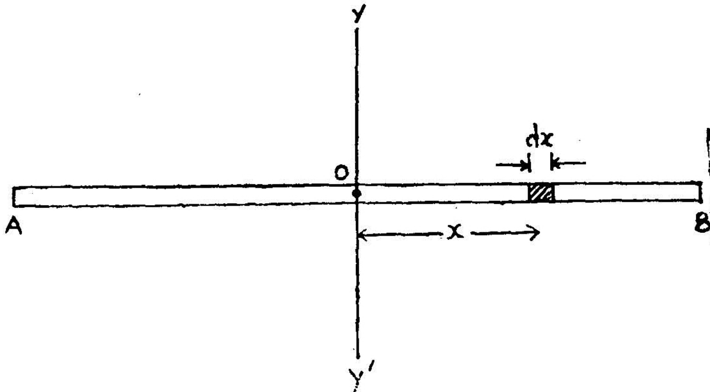
இத் தேற்றம் மென்தகட்டிற்குமட்டுமே பொருந்தும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

சில திண்பொருள்களின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

மெல்லிய, சீரான தண்டின் புவியீர்ப்புமையம் வழியே அதன் நீளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்:

2a அலகு நீளத்தைக்கொண்ட AB என்ற ஒரு மெல்லிய சீரான தண்டைக் கருதுவோம். (படம் 9·5). அதன் ஓரலகு நீளத் திற்கு நிறை P எனவும் முழு நிறை M எனவும் கொள்வோம்.

YOY' என்பது AOB-க்கு நேர்குத்தாக அதன் புவியீர்ப்பு மையம் (O) வழியாகச் செல்லும் ஓர் அச்சு. O-விலிருந்து x தொலைவில் dx நீளமுள்ள ஒரு சிறு பகுதியைக் கருதுவோம். அதன் நிறை P dx.



படம் 9·5

YOY'-ஐப் பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= Pdx \cdot x^2$

$x = -a$, $x = +a$ மதிப்புகளிடையே $Pdx.x^2$-ன் தொகுநி காணின் முழுத்தண்டின் YOY'-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறனைப் பெறலாம்.

அதாவது, தண்டின் YOY'-ஐப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \int_{-a}^{+a} Px^2 dx$$

$$= P\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a}$$

$$= \frac{2\ Pa^3}{3}$$

ஆனால், முழுத்தண்டின் நிறை $M = 2aP$

$\therefore \quad = \frac{1}{3} Ma^2$ ... ... 9·8

YOY' என்ற அச்சு தண்டின் ஒரு முனைவழியே அதன் நீளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லுமாயின், அந்த அச்சைப்பற்றிய தண்டின் நிலைமத் திருப்புதிறனைக்காண, $x = 0$, $x = 2a$ மதிப்புகளிடையே Px^2dx-ன் தொகுநியைக் காணவேண்டும்.

அதாவது, தண்டின் நீளத்திற்கு நேர்குத்தாக ஒருமுனைவழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \int_{0}^{2a} P x^2 dx$$

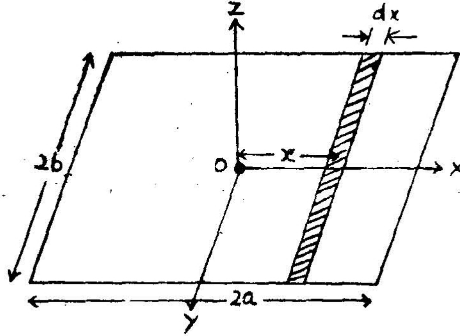
$$= \left[\frac{P x^3}{3}\right]_{0}^{2a}$$

$$= \frac{8 Pa^3}{3}$$

அல்லது, $I = \frac{4}{3} Ma^2$ ... ... 9·9

செவ்வகவடிவ மென்தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே அதன் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்

மென்தகட்டின் நீளம் 2a, அகலம் 2b, ஓரலகுப் பரப்பிற்கு நிறை P எனக் கொள்வோம். OX, OY என்பன மென் தகட்டின்



படம் 9·6

தளத்தில் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் (O) வழியாகச் செல்லும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாயமைந்த அச்சுகள். OZ என்பது OX, OY ஆகிய இரண்டிற்கும் நேர்குத்தாயமைந்த ஓர் அச்சு [படம் 9·6] தகட்டின் முழுநிறை M எனக் கொள்வோம்.

மென்தகட்டில் OY-லிருந்து x தொலைவில் dx அகலமுள்ள ஒரு சிறு பகுதியைக் கருதுவோம். அதன் நிறை 2b. dx. P. OY-ஐப் பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் 2b P x^2dx. எனவே, OY-ஐப் பற்றிய முழுத்தகட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_{-a} 2b\, P\, x^2 . dx$$

$$= 2bP \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3 bP}{3}$$

ஆனால், 4abP = M.

$$\therefore \quad I_y = \frac{Ma^2}{3}$$

அவ்வாறே மென்தகட்டில் OX லிருந்து y தொலைவில் dy அகலமுள்ள ஒரு பகுதியைக் கருதுவோயாயின் தகட்டின் OX-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I_x = \frac{Mb^2}{3}$$

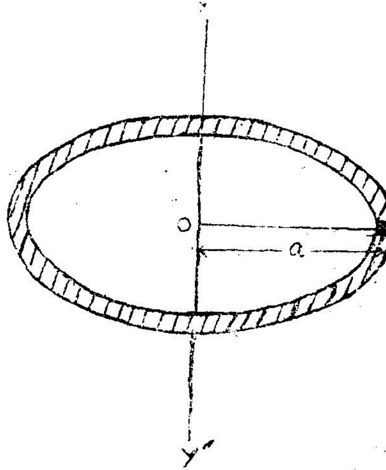
∴ தகட்டின் OZ-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$I_z = I_x + I_y$ (நேர்குத்தச்சுகளின் தேற்றம்)

அல்லது $I_z = \frac{M}{3}(a^2+b^2)$ ... ... 9·10

ஒரு வட்டவளையத்தின் மையத்தின்வழியே அதன் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் :

வட்ட வளையத்தின் ஆரம் 'a' எனவும் நிறை M எனவும் மையம் O எனவும் இருக்கட்டும். [படம் 9·7] வளையத்தில் m என்ற நிறையை உடைய ஒரு சிறு பகுதியை எடுத்துக்கொள்வோம்.



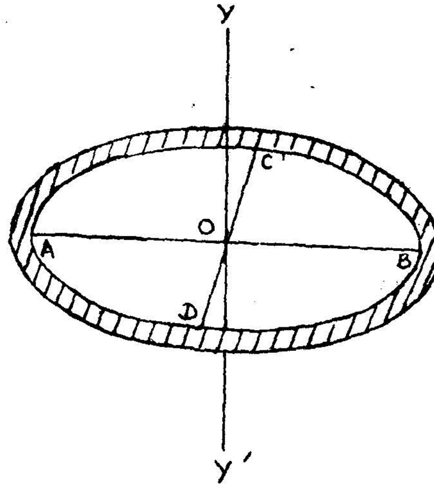
படம் 9·7

O வழியே செல்லும் YOY′ என்ற அச்சைப்பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= ma^2$

வளையத்தின் அத்தகைய சிறு பகுதிகள் YOY'-லிருந்து ஒரே தொலைவில் இருப்பதால், வளையத்தின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாக O வழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \Sigma ma^2 = Ma^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 9{\cdot}11$$

வட்ட வளையம் ஒன்றின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் : வளையத்தின் AB, CD என்ற ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக உள்ள இரு விட்டங்களைக் கருதுவோம். [படம் 9·8] வளையத்தின்



படம் 9·8

AB-ஐப்பற்றி நிலைமத் திருப்புதிறன் I என்றால் CD-ஐப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறனும் I ஆகும். எனவே, அவ் விரு அச்சுகளுக்கும் நேர்குத்தாக, வளையத்தின் மையம் (O) வழியே செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I_1 = I + I = 2I$$

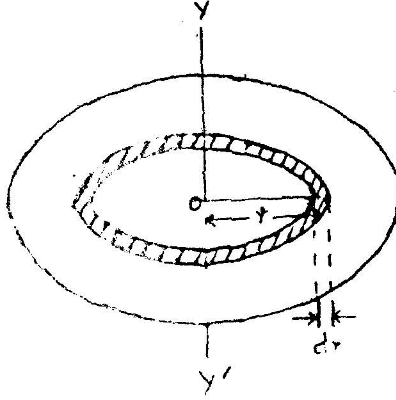
ஆனால், $I_1 = 2I = Ma^2$ [சமன் 9·11]

எனவே, $$I = \frac{Ma^2}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad 9{\cdot}12$$

சீரான வட்டத் தகட்டின் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்கு நேர்செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்:

தட்டின் ஆரம் a எனவும் ஓரலகு பரப்பிற்கு நிறை P எனவும் மையம் O எனவும் முழுநிறை M எனவும் இருக்கட்டும். படம்

9·9-ல் YOY' என்பது O வழியே தட்டின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச்



படம் 9·9

செல்லும் ஓர் அச்சு.

O-ஐ மையமாகவும் r அலகு ஆரத்தையும் dr அலகு அகலமும் கொண்ட ஒரு சிறு வட்டவடிவப் பகுதியைக் கருதுவோம். இதனை ஒரு வட்ட வளையமாகக் கருதலாம். அதன் நிறை $2\pi rdr.P$

YOY'-ஐப்பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= 2\pi Prdr.\ r^2$
$= 2\pi Pr^3dr.$

மேற்கண்ட கோவையின் $r = a$, $r = a$ மதிப்புகளிடையே தொகுதி காணின் தகட்டின் YOY'-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறனைப் பெறலாம்.

எனவே, தட்டின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாக அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \int_0^a 2\pi Pr^3 dr$$

$$= \frac{\pi Pa^4}{2}$$

ஆனால், $\pi Pa^2 = M$

எனவே, $I = \frac{Ma^2}{2}$ ... ... 9·13

ஒரு வட்டத்தகட்டின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்:

தகட்டின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத்திருப்புதிறன் I எனில் அதற்கு நேர்குத்தான மற்றொரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறனும் I ஆகும். எனவே, தகட்டின் அவ் விரு வட்டங்களுக்கும் நேர்குத்தான (அதாவது தட்டின் தளத்திற்கு நேர்குத்தான) அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

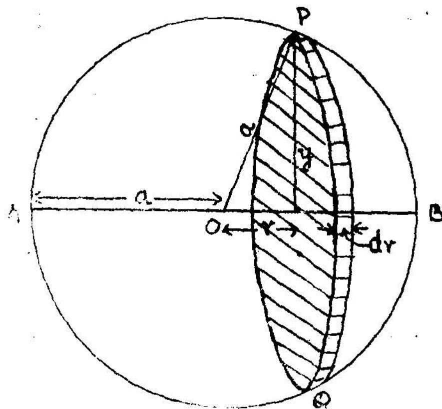
$$I_1 = I + I = 2I$$

ஆனல், $I_1 = 2I = \frac{Ma^2}{2}$ [சமன் 9·13]

எனவே, $I = \frac{Ma^2}{4}$ ... ... 9·14.

சீரான கோளம் ஒன்றின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் :

படம் 9·10-ல் O, கோளத்தின் மையத்தையும் AB, ஒரு விட்டத்தையும் குறிக்கின்றன. ஆரம் a எனவும் ஓரலகு பருமனுக்கு நிறை P



படம் 9·10

எனவும் இருக்கட்டும். கோளத்தை AB-க்கு நேர்குத்தான தளங்களால் dx தடிப்புள்ள வட்டவடிவச் சிறு பகுதிகளாகப் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். O-விருந்து x தொலைவிலுள்ள அத்தகைய ஒரு சிறு பகுதி (PQ) யைக் கருதுவோம். அதன் ஆரம் y என்றால்

அதன் நிறை $= \pi y^2 dx P$

$$= \pi (a^2 - x^2) dx . P$$

AB-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \frac{1}{2} \pi (a^2 - x^2)\, dx . P \times (a^2 - x^2)$

$$= \frac{1}{2} \pi (a^2 - x^2)^2\, dx . P$$

எனவே, கோளத்தின் AB விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் :

$$I = \int_{-a}^{+a} \frac{\pi}{2} P\,(a^2 - x^2)^2 dx.$$

$$= \frac{\pi}{2} P \left[\int_{-a}^{+a} a^4 dx + \int_{-a}^{+a} x^4 dx - \int_{-a}^{+a} 2a^2 x^2 dx \right]$$

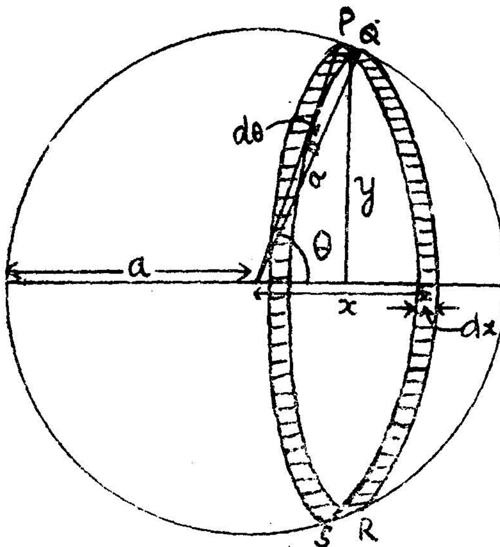
$$= \frac{\pi}{2} P \left[2a^5 + \frac{2a^5}{5} - \frac{4a^5}{3} \right]$$

$$= \frac{8}{15} \pi P a^5$$

ஆனால், $\frac{4}{3} \pi a^3 P = M$

எனவே, $I = \frac{2}{5} Ma^2$ ... ... 9·15

கோளகக் கூடு ஒன்றின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் :



படம் 9·11

கோளகக் கூட்டின் ஆரம் a எனவும், ஓரலகு பரப்பிற்கு நிறை P எனவும், முழுநிறை M எனவும் கொள்வோம். கோளகக் கூட்டை

AB என்ற விட்டத்திற்கு நேர்குத்தான தளங்களால் dx தடிப்புள்ள சிறு வளையங்களாகப் பிரித்து அத்தகைய வளையம் ஒன்றை (PQRS க் கருதுவோம். [படம் 9·11.] படத்தில் $\widehat{QOB}=\theta$ எனவும் $\widehat{POQ}=d\theta$ எனவும் இருக்கட்டும். $PQ=a\,d\theta$. எடுத்துக்கொண்ட வளையத்தின் ஆரம் y எனில்,

$$y=a\sin\theta$$

மேலும், $x=a\cos\theta$

எனவே, $dx=-a\sin\theta\, d\theta$

எடுத்துக்கொண்ட வளையத்தின் பரப்பளவு

$$=2\pi y\,.\,PQ$$
$$=2\pi a^2\sin\theta\, d\theta$$
$$=-2\pi a\,dx.$$

எதிர்க்குறி, x அதிகமாகும்போது, பரப்பளவு குறைவதைக் குறிக்கிறது.

வளையத்தின் நிறை $=2\pi a\,dx\,P$

AOB-ஐப்பற்றிய நிலைமத்திருப்பு திறன் $=2\pi aP\,dx\,y^2$

$$=2\pi Pa\,(a^2-x^2)dx.$$

எனவே கோளகக் கூட்டின் AOB-ஐப்பற்றிய நிலைமத்திருப்பு திறன்

$$I=\int_{-a}^{+a}2\pi\, Pa\,(a^2-x^2)\,dx$$

$$=2\pi Pa\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a}$$

$$=2\pi Pa\left(\tfrac{4}{3}a^3\right)$$

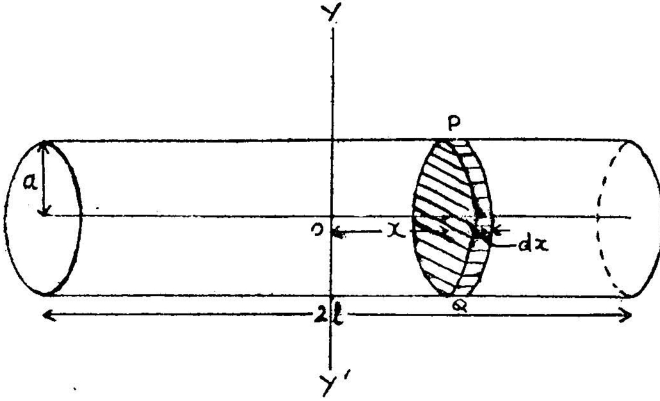
$$=\tfrac{8}{3}\pi Pa^4$$

ஆனால் $4\pi a^2P=M$

எனவே, $I=\tfrac{2}{3}Ma^2$ ... ... 9·16·

சீரான உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே அதன் நீளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் ஓர் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் :

உருளையின் ஆரம் Q எனவும் நீளம் $2l$ எனவும் ஓரலகுப் பருமனின் நிறை P எனவும் முழுநிறை M எனவும் கொள்வோம். YOY′ என்பது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே நீளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் ஓர் அச்சு. [படம் 9·12.] உருளையை அதன் அச்சுக்கு நேர்குத்தான தளங்களால் dx தடிப்புள்ள சிறு வட்ட வில்லைகளாகப் பிரித்து, YOY′ லிருந்து x தொலைவிலுள்ள அத்தகைய வில்லையொன்றை (PQ)க் கருதுவோம்.



படம் 9·12

அதன் நிறை $= \pi a^2 dx \,.\, P$

YOY′-க்கு இணையான அதன் விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \pi Pa^2 dx \times \frac{a^4}{4}$ [சமன் 9·14]

YOY′-ஐப்பற்றிய அதன் நிலைமந் திருப்புதிறன்

$$= \frac{\pi Pa^4}{4} dx + \pi Pa^2 dx \,.\, x^2$$ [இணையச்சுகளின் தேற்றம்.]

எனவே, உருளையின் YOY′-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \int_{-l}^{+l} \frac{\pi Pa^4}{4} dx + \pi Pa^2 \int_{-l}^{+l} x^2 dx$$

$$= \frac{\pi Pa^4}{4} \,.\, 2l + \pi Pa^2 \frac{2l^3}{3}$$

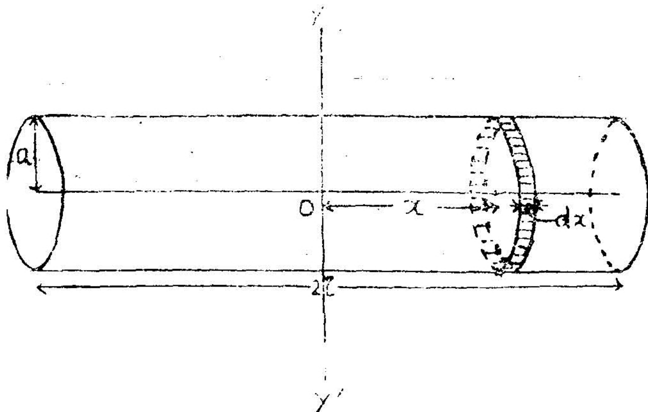
$$= 2\pi Pa^2 l \left[\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right]$$

ஆனால், $2\pi Pa^2 l = M$

எனவே, $$I = M \left[\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right] \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 9{\cdot}17$$

உள்ளீடற்ற உருளையின் மையத்தின்வழியே அதன் நீளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்:

உருளையின் நீளம் $2l$ எனவும் முழுநிறை M எனவும் இருக்-



படம் 9·13

கட்டும். YOY′ என்பது உருளையின் மையத்தின் (O) வழியாக அதன் நீளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் ஓர் அச்சு.

உருளையின் அச்சுக்கு நேர்குத்தான இரு தளங்களுக்கிடையே x தொலைவில் உள்ள, dx தடிப்புள்ள ஒரு வளையத்தைக் கருதுவோம்.

$$\text{அதன் நிறை} = \frac{M}{2l}\, dx.$$

YOY′-க்கு இணையான விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \frac{M}{2l} dx \cdot \frac{a^2}{2}$ [சமன் 9·12]

YOY′-ஐப்பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \frac{M}{4l}\, a^2 \cdot dx + \frac{M}{2l} \cdot dx \cdot x^2.$$

எனவே, உருளையின் YOY′-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

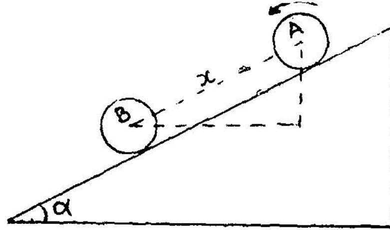
$$I = \int_{-l}^{+l} \frac{M}{4l}\, a^2 dx + \int_{-l}^{+l} \frac{M}{2l}\, x^2 dx.$$

$$= \frac{Ma^2}{4l} \times 2l + \frac{M}{2l} \cdot \frac{2l^3}{3}.$$

அதாவது, $I = M\left(\frac{a^2}{2} + \frac{l^2}{3}\right)$ 9.17

சாய்தளம் ஒன்றின்மீது கீழ்நோக்கி உருளும் ஒரு பந்தின் முடுக்கம்:

கிடைத் தளத்திற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் ஒரு சாய் தளத்தின்மீது, M நிறையுடைய ஒரு பந்து A என்ற புள்ளியில்



படம் 9·14

ஓய்விலிருந்து தொடங்கி B-க்கு உருளுவதாகக் கொள்வோம்.

AB = x என இருக்கட்டும். [படம் 9·14]

பந்து A-லிருந்து B-ஐ அடையும்போது, அதன் ஆற்றலில் ஏற்பட்ட இழப்பு = Mg. AB sin α

$$= Mgx \sin\alpha.$$

இந்த நிலையாற்றல் இழப்பானது, B-ல் பந்து பெறும் மொத்த இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாகும். B-ல் பந்தின் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகம் v எனவும், கோணத் திசைவேகம் w எனவும் இருக்கட்டும். பந்தின் ஆரம் r என்றால் v = rw.

B-ல் :

பந்தின் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகத்தால் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}Mv^2$

கோணத் திசை வேகத்தால் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} Iw^2$

எனவே, மொத்த இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} Iw^2$

பந்தின் சுழற்சி ஆரம் K எனில் $I = MK^2$

எனவே மொத்த இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} MK^2 \frac{v^2}{r^2}$

$$= \frac{Mv^2}{2}\left[1 + \frac{K^2}{r^2}\right]$$

ஆற்றல் அழியாமை விதிப்படி,

$$\frac{Mv^2}{2}\left[1 + \frac{K^2}{r^2}\right] = Mgx \sin\alpha$$

அல்லது
$$v^2 = 2. \frac{g \sin\alpha}{\left(1 + \frac{K^2}{r^2}\right)} \cdot x.$$

A-லிருந்து B-ன் செங்குத்து ஆழம் $h = x \sin \alpha$ எனில்

$$v^2 = \frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right)} \quad \ldots \quad \ldots \ 9{\cdot}18a$$

இச் சமன்பாட்டை $v^2 = 2as$ என்னும் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பு நோக்குவோமாயின்,

பந்தின் முடுக்கம் $$a = \frac{g \sin \alpha}{1+\frac{K^2}{r^2}} \quad \ldots \quad \ldots \ 9{\cdot}19$$

சிறப்பு நேர்வுகள்

1. கெட்டியான பந்து : இங்கு $K^2 = \frac{2}{5} r^2$ [சமன் 9·15]

   எனவே, $a = \frac{g \sin \alpha}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$

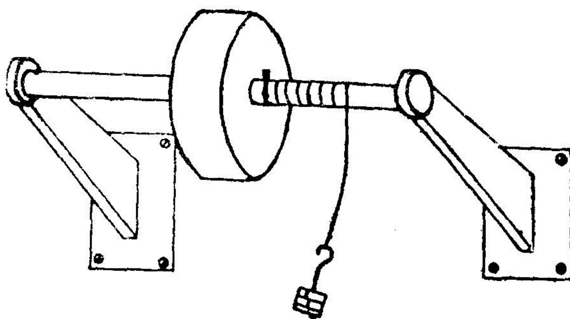
2. கோளகக் கூடு : இங்கு $K^2 = \frac{2}{3} r^2$ (சமன் 9·16)

   எனவே, $a = \frac{3}{5} g \sin \alpha$

3. வட்டத் தட்டு : இங்கு $K^2 = \frac{r^2}{2}$ (சமன் 9·13)

   எனவே $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

விசையாட் சுழலியின் நிலைமத் திருப்பு திறனைச் சோதனைமூலம் மதிப்பிடுதல் : விசையாட் சுழலி (fly wheel) என்பது கிடைத்தள அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் ஓர் எடை மிக்க இரும்புச் சக்கரம். அதன் அச்சின் முனைகள் உருள் குண்டுகள் தாங்கிகளில் (ball bearings) பொருத்தப்பட்டு, கூடியவரை உராய்வு தடுக்கப்படுகிறது. அச்சில் உள்ள ஒரு சிறு முனையில் மெல்லிய கயிறு ஒன்றின் ஒரு முனை கட்டப்பட்டு, கயிறு அச்சின்மீது சுற்றப்பட்டு மறுமுனையில் ஒரு



படம் 9·15

சிறு மதிப்புத்தெரிந்த நிறை (m) தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. [படம் 9·15]. இந்த நிறை விடுவிக்கப்படுமாயின், அது தரையை

அடையும்போது கயிறு அச்சிலிருந்து விலகுமாறு அதன் நீளம் சரி செய்யப்படுகிறது.

சோதனையைச் செய்யும்போது கயிறு அச்சின்மீது சுற்றப்பட்டு, நிறையானது தரையிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்தில் (h) இருக்குமாறு செய்யப்படுகிறது. நிறையைக் குறிப்பிட்ட உயரத்திற்கு மேலே தூக்கும்போது, சக்கரம் சுற்றப்படவேண்டிய சுற்றுக்களை n_1 எனக் கொள்வோம். இது நிறை அந்த உயரத்திலிருந்து தரைக்கு விழும்போது சக்கரம் சுற்றும் சுற்றுகளாகும். பின்னர் நிறை விடுவிக்கப்பட்டு, தரையை அடைவதற்கு அது எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமும் நிறை, தரையை அடைந்தபின் சக்கரம் ஓய்வு பெறும்வரை அது சுற்றிய சுற்றுகளும் கணக்கிடப்படுகின்றன. அவற்றை முறையே t, n_2 எனக் கொள்வோம்.

சோதனையில் நிறையானது h உயரத்திலிருந்து தரைக்கு விழும் பொழுது, அது இழந்த நிலையாற்றல் மூன்று வகைகளில் வெளிப்படு கிறது. 1. அது தரையைத் தொடும்பொழுது அதன் இயக்க ஆற்றல், 2. அக் கணத்தில் விசையாட் சுழலியின் இயக்க ஆற்றல், 3. சக்கரம் சுழலும்போது உராய்வை எதிர்த்துச் செய்யப்படும் வேலை.

இனி, விசையாட் சுழலியின் நிலைமத் திருப்புதிறன் I என்றும் நிறை தரையைத் தொடும் கணத்தில் அதன் நேர்க்கோட்டுத் திசை வேகம் v எனவும், விசையாட் சுழலியின் கோணத் திசை வேகம் w எனவும் கொள்வோம். நிறையானது தரையைத் தொடும்வரை அது இழந்த நிலையாற்றல் $= mgh$; தரையைத் தொடும் கணத்தில் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$; அக் கணத்தில் விசையாட் சுழலி யின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} Iw^2$; ஒவ்வொரு சுழற்சியின்போதும் உராய்வை எதிர்த்துச் செய்யப்படும் வேலை C என்றால், நிறை தரை யைத் தொடும்வரை செய்யப்பட்ட வேலை $= n_1 c$ ஆகும். எனவே, ஆற்றல் அழியாமை விதிப்படி

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Iw^2 + n_1 c \quad \ldots \quad \ldots \quad 9{\cdot}20$$

நிறை தரையைத் தொட்டபின், அதாவது சக்கரத்திலிருந்து விலகியபின் சக்கரத்தின் இயக்க ஆற்றல் ($\frac{1}{2} Iw^2$) அது ஓய்வு பெறும்வரை உராய்வை எதிர்த்துச் செய்யப்பட்ட வேலைக்குச் சமமாகும். நிறை விலகிய கணத்திலிருந்து, சக்கரம் ஓய்வுபெறும் வரை சுற்றிய சுற்றுகள்

n_2 ஆதலால் $\frac{1}{2} Iw^2 = n_2 c$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{2n_2} Iw^2$$

c-ன் இம் மதிப்பைச் சமன் 9·20-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Iw^2 + \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_2} Iw^2$$

அல்லது $$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Iw^2 \left[1 + \frac{n_1}{n_2} \right] \quad \ldots \quad \ldots \quad 9{\cdot}21$$

மேலும், நிறையானது ஓய்விலிருந்து h உயரத்திற்கு விழும் போது, அது பெறும் முடுக்கம் a எனில், சமன் 2·13-ன் படி

$$h = \frac{1}{2} at^2$$

அல்லது $$a = \frac{2h}{t^2}$$

எனவே, நிறை தரையைத் தொடும்போது அதன் திசை வேகம்

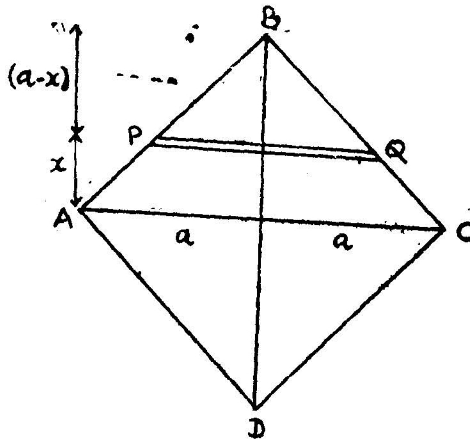
$$v = at$$

$$= \frac{2h}{t^2} \times t$$

அல்லது $$v = \frac{2h}{t}$$

மேலும், விசையாட் சுழலியின் ஆரம் r எனில்,

$$w = \frac{v}{r}$$



படம் 9·16

எனவே, சமன் 9·21-ல் v, w, n_1, n_2 ஆகியவற்றின் தெரிந்த மதிப்புகளைப் பதிலீடுசெய்து I-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. சதுரவடிவ மென்தகடு ஒன்றின் ஒரு புள்ளியில் அடர்த்தி அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தொலைவின் இருமடிக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கிறது. அத் தகட்டின் மூலைவிட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறனைக் கணக்கிடுக.

படம் 9·16-ல் ABCD மென் தகட்டையும், AC குறிப்பிட்ட மூலைவிட்டத்தையும் குறிக்கட்டும். மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தை 2a எனக் கொள்வோம்.

அந்த மூலைவிட்டத்திலிருந்து x தொலைவில், dx அகலமுள்ள AC-க்கு இணையாக ஒரு சிறு துண்டை (PQ)க் கருதுவோம்.

PQ-ன் பரப்பளவு $ds = PQ.\, dx,$

ஆனால், $\frac{PQ}{BC} = \frac{a-x}{a}$

$\frac{PQ}{2a} = \frac{a-x}{}$

$\therefore \quad PQ = 2\,(a-x)$

$\therefore \quad ds = 2\,(a-x)\,dx.$

தகட்டின் ஓரலகு பரப்பிற்கு நிறை P எனக் கொள்வோமாயின்,

$$P = K\,x^2$$

$\therefore$ PQ ன் நிறை $= 2K\,(a-x)\,x^2dx.$

எனவே, தகட்டின் நிறை $M = \int_{-a}^{+a} 2k\,(a-x)\,x^2dx.$

அல்லது, $M = 2k\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{+a}$

$$= \frac{4ka^4}{3}$$

மேலும், PQ-ன் AC-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$dI = 2k\,(a-x)\,x^4\,dx.$$

$\therefore$ AC-ஐப்பற்றிய தகட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \int_{-a}^{+a} 2K\,(a-x)x^4dx.$$

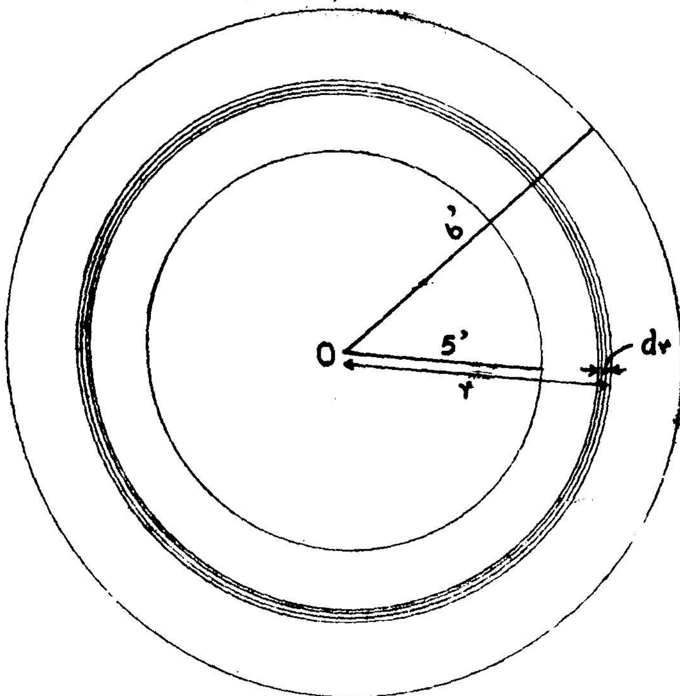
$$= 2K\left[\frac{ax^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_{-a}^{+a}$$

$$= \frac{4}{5}.\ Ka^6$$

அல்லது $$I = \frac{3}{5} Ma^2.$$

மாதிரிக் கணக்கு 2. 5 அடி உள் ஆரமும் 6 அடி வெளி ஆரமும் 5டன் நிறையும் கொண்ட ஒரு விசையாட் சுழலியை நிமிடத்திற்கு 60 சுற்றுகள் வீதம் சுழலச் செய்யக்கூடிய எந்திரத்திறனைக் கணக்கிடுக.

படம் 9·17 விசையாட் சுழலியின் அமைப்பைக் காட்டுகிறது; O, சக்கரத்தின் மையமாகும். O-விலிருந்து r தொலைவில் உள்ளதும்



படம் 9·17

dr அகலம் கொண்டதுமான ஒரு சிறு வளையத்தைக் கருதுவோம். சக்கரத்தின் தடிப்பு t எனவும் அடர்த்தி P எனவும் கொள்வோமாயின் வளையத்தின் நிறை $dm = 2\pi r dr \times t \times P$

எனவே, சக்கரத்தின் முழு நிறை $M = 2\pi tP\int_5^6 r dr$

$$= 2\pi tP\left[\frac{r^2}{2}\right]_5^6$$

$$= \pi tP \times 11$$

அல்லது $M = 11\pi tP$ பவு.

O வழியே சக்கரத்தின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய வளையத்தின் திருப்புதிறன்,

$$dI = 2\pi tP\, r^3 dr.$$

எனவே, சக்கரத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன்,

$$I = \int_5^6 2\pi tP\, r^3 dr$$

$$= 2\pi tP\left[\frac{r^4}{4}\right]_5^6$$

$$= \frac{671}{2}\pi tP$$

$$= M\frac{61}{2} = 5 \times 2240 \times \frac{61}{2} \text{ பவு-அடி}^2.$$

சக்கரமானது நிமிடத்திற்கு 60 சுற்றுகள்வீதம் அதாவது, வினாடிக்கு ஒரு சுற்றுவீதம் சுற்றும்போது, அதன் கோணத் திசை வேகம்,

$$W = 2\pi \text{ ரேடியன்/வி.}$$

∴ இயக்க ஆற்றல், $= \frac{1}{2} Iw^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 2240 \times \frac{61}{2} \times 4\pi^2$ அடி-பவுண்டல்

∴ ஒரு வினாடியில் செய்யப்பட்ட வேலை $= 5 \times 2240 \times 61 \times \pi^2$ அடி-பவுண்டல்.

∴ தேவைப்படும் திறன், $= \frac{5 \times 2240 \times 61 \times \pi^2}{32 \times 550}$ குதிரைத்திறன்.

அதாவது, எந்திரத்தின் திறன் = 383·43 குதிரைத்திறன்.

பயிற்சி IX

1. இரண்டு அடி விட்டமும் 2″ தடிப்பும் கொண்ட இரும்பாலான சீரான வட்டத்தட்டு ஒன்று அதன் மைய அச்சைச் சுற்றி நிமிடத்திற்கு 150 முறை சுற்றுகிறது. இரும்பின் அடர்த்தி 478.

பவு/கன அடி என்ருல், தட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன், கோண உந்தம், இயக்க ஆற்றல் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

[$\frac{239}{6}$ பவு-அடி², $\frac{2395}{6}\pi^2$ அலகுகள், 482·2 அடி-பவுண்டுகள்.]

2. 12 அங். விட்டமுள்ள வட்டமான, சீரான தகட்டின் நடுவிலிருந்து 6 அங். விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்துளை வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சியுள்ள தகடு ஓர் உராய்வுடைய கிடைத்தள ஆணியிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. அது செங்குத்துத் தளத்தில் சிறு அலைவுகளை மேற்கொள்ளுமாயின் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக. [$\frac{1}{8}\pi\sqrt{7}$வி.]

3. ஒரு விசையாட் சுழலி 2 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத் தட்டு வடிவிலுள்ளது. அதன் நிறை 120 பவு. அதன் சுழற்சி வேகத்தை விஞடிக்கு 10 சுற்றுகளிலிருந்து 20 சுற்றுகளாக மாற்றுவதற்கு அதன்மீது செய்யப்படவேண்டிய வேலையின் அளவைக் கணக்கிடுக. [$1{\cdot}42\times10^6$ அடி-பவுண்டல்கள்]

4. 8 அங். ஆரமும் 54 பவு. நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான வட்டத்தட்டு வடிவிலுள்ள ஒரு விசையாட் சுழலி ஒரு கிடைத்தள அச்சைப்பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அதன் விளிம்பில் சுற்றப்பட்ட கயிற்றின் மூலம் 20 பவு. நிறை ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இந்த அமைப்பு ஓய்விலிருந்து இயங்கினுல், நிறை, 41 அடி உயரம் இறங்கியபின் அதன் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

6. 20 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிறு ஒரு சக்கரத்தின் 4 அங். விட்டமுள்ள அச்சில் சுற்றப்பட்டு அது முழுவதும் பிரிக்கப்படும் வரை 15 பவு. எடை விசையுடன் இழுக்கப்படுகிறது. அதன் பின்னர்ச் சக்கரம் நிமிடத்திற்கு 100 முறை வீதம் சுற்றினுல் அதன் நிலைமத் திருப்புதிறனைக் கணக்கிடுக. [$5760/\pi^2$ பவு-அடி².]

7. ஓர் அட்வுட் எந்திரத்தில் உள்ள கப்பி 3 அங். விட்டம் கொண்டதாயுள்ளது. அதன் எடையான 6 அவு. அதன் பரிதியில் செறிவுபடுத்தப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். 12 அவு., 18 அவு. எடைகள் கயிற்றின் முனைகளில் இணைக்கப்பட்டிருப்பின், அவற்றின் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. அச்சின் உராய்வைப் புறக்கணிக்க.

[5·33 அடி/வி.²]

8. சீரான வட்டத் தட்டு ஒன்று 50-க்கு 1 சரிவில் உருளுகிறது. அதன் முடுக்கம் g/75 எனக் காட்டுக.

9. 5 செ. மீ ஆரமுள்ள ஒரு கெட்டியான கோளம், கிடைத் தளத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்த, 6 செ.மீ. தொலைவிலுள்ள, வழவழப்பான, இணையான தண்டவாளங்களின்மீது உருளுகிறது. அதன் நேர்க்கோட்டு முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. [$\frac{5}{7}$ g sin α]

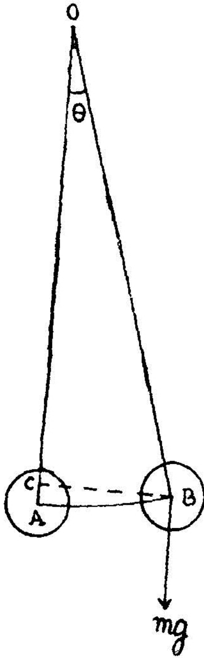
10. 40 பவு. நிறையும் 10 அங். விட்டமும் கொண்ட கெட்டியான கோளம் ஒன்று 4-க்கு 1 சரிவுடைய சாய்தளம் ஒன்றின்மீது ஓய்விலிருந்து தொடங்கி 10 அடி தொலைவுக்கு உருளுகிறது. (i) சுழற்சியினால் ஏற்படும் அதன் ஆற்றல், (ii) அதன் முழு ஆற்றல் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. $\left[\frac{100}{7}\right.$ அடி-பவுண்டு, $\left.\frac{200}{7}\right.$ அடி-பவு.$\left.\right]$

10. ஈர்ப்பு முடுக்கம்

(Acceleration due to gravity)

உயரமான இடத்திலிருந்து கீழ்நோக்கி விழும் ஒரு பொருள் சீரான முடுக்கம் ஒன்றைப் பெறுகிறது என்றும், அம் முடுக்கம் ஈர்ப்பு முடுக்கம் எனப் பெறும் என்றும் முன்னர்க் கூறப்பட்டது. இப் பகுதியில் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பைக் காண்பதற்குப் பயன்படும் கருவிகளான பலவகை ஊசல்களைப்பற்றிக் காண்போம்.

1. ஊசல்கள் (pendulums)



படம் 10.1

1. தனி ஊசல் (simple pendulum) : தனி ஊசலின் அமைப்பைப் பற்றியும் விதிகளைப் பற்றியும் முதற் பகுதியில் கண்டோம். இப் பகுதியில் அதனைப் பயன்படுத்தி ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பை எவ்வாறு காண்பது என்று ஆராய்வோம்.

படம் 10·1-ல் OA, தனி ஊசலின் சமநிலையைக் குறிக்கிறது. ஊசல் அலைவுறும் போது, குண்டு B என்ற நிலையில் இருக்கும் ஒரு கணத்தைக் கருதுவோம். ஊசலின் நீளம் l எனவும் குறிப்பிட்ட கணத்தில் குண்டின் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகம் v எனவும் கோணத் திசை வேகம் w எனவும் கொள்வோம். குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஊசல் கயிறு அதன் சமநிலையிலிருந்து ஒரு சிறு கோணத்தில் (θ) சாய்ந்திருக்கட்டும்.

குறிப்பிட்ட கணத்தில்,

$$v = lw = l\frac{d\theta}{dt}$$

எனவே, குண்டின் இயக்க ஆற்றல்

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

குண்டு A-லிருந்து B-க்குச் செல்லும்போது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் உயர்த்தப்பட்டிருக்கும் தொலைவு,

$$AC = OA - OB$$
$$= l - l\cos\theta$$
$$= l\,(1 - \cos\theta)$$

எனவே, B-ல் குண்டின் நிலையாற்றல்,

$$= mg\,l(1 - \cos\theta)$$

ஆற்றல் அழிவின்மை விதிப்படி, B-ல் குண்டின் மொத்த ஆற்றல்

$$\frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\,l\,(1 - \cos\theta) = \text{மாறிலி.}$$

பகுதி காணின்,

$$\frac{1}{2} ml \;\; 2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\,l\sin\theta \;\; \frac{d\theta}{dt} = 0$$

அல்லது
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

θ-ன் மதிப்பு சிறியதாயிருக்கும்போது $\sin\theta = \theta$ ஆதலால்,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 10{\cdot}1$$

$\frac{g}{l}$, ஒரு மாறிலியாதலால், சமன் 10·1 ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்கிறது; அதன் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

எனவே,
$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 10{\cdot}2$$

சமன் 10·2-ல், g-ன் மதிப்பு மாறிலியாதலால் $\frac{l}{T^2}$-ன் மதிப்பு மாறிலியாகும் ஊசலின் வெவ்வேறு நீளங்களுக்கு அலைவு நேரங்களை மதிப்பிட்டு $\frac{l}{T^2}$-ன் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, g-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

இலகு ஊசலைக்கொண்டு மதிப்பிடப்படும் மதிப்பு, பின்வரும் சில காரணங்களால் துல்லியமானதன்று:

1. ஊசல் விதிகள் இலட்சிய ஊசலுக்கே பொருந்தும். ஆனல், ஓர் இலட்சிய ஊசலே அமைப்பது இயலாததொன்று. எனவே, நூலுக்கு ஒரு நிலைமத் திருப்புதிறனும் உண்டு.

2. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ என்ற சமன்பாடு ஊசலின் மிகச் சிறிய வீச்சுகளுக்கே பொருந்தும்.

3. சரியாகக் கூறுமிடத்து, ஊசல் குண்டின் இயக்கம் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கம் மட்டுமன்றித் தொங்கு தானத்தைப்பற்றிய ஒரு சுழற்சி இயக்கத்தையும் கொண்டுள்ளது.

4. கோடி முனைகளில் குண்டானது நூலைப்பொறுத்த ஒரு சார்பு இயக்கத்தையும் கொண்டுள்ளது.

ஊசலின் அலைவு நேரம் அதன் நீளத்தையும் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தையும் பொறுத்துள்ளது. அவைகள் சிறிதளவு மாறுபடுவதால் ஏற்படும் விளைவுகளை இப்போது ஆராய்வோம்.

ஊசலின் அலைவுகளில் ஏற்படும் மாறுதல்: ஊசலின் நீளம், ஈர்ப்பு முடுக்கம் ஆகியவற்றின் மாறுதலால் ஏற்படும் விளைவுகளுள் முக்கியமான ஊசல் ஒன்று பொருத்தப்பட்ட கடிகாரங்கள் மெதுவாகவோ அல்லது வேகமாகவோ செல்வதுதான். அத்தகைய கடிகாரங்களில் ஊசல் ஒரு பாதி அலைவை முடிக்கும் போது—அதற்குரிய நேரம் எவ்வளவு ஆயினும்—கடிகாரமுள் ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவு நகரும்படி எந்திர அமைப்பு இருக்கும். பொதுவாக, கடிகாரங்களில் வினாடி ஊசல் (அலைவு நேரம் 2 வினாடி) பொருத்தப்பட்டிருக்கும். அத்தகைய ஒரு கடிகாரத்தை எடுத்துக்கொள்வோமாயின், ஊசலின் அலைவு நேரம் மாறுபட்டாலும் முள் ஒரு வினாடி காலத்தையே பதிவு செய்வதால் அது குறைவான நேரத்தையோ, கூடுதலான நேரத்தையோ அறிவிக்கும். மேலும், ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவில் ஊசல் மேற்கொள்ளும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை மாறும். அது மாறும் வகையை இங்கு நாம் ஆராய்வோம்.

t வினாடி அலைவு நேரத்தைக்கொண்ட ஒரு குறிப்பிட்ட ஊசல் T வினாடிகளில் n அலைவுகளை மேற்கொள்வதாகக் கருதுவோம்.

$$T = nt$$

ஆனல், $$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

எனவே, $$T = 2\pi n\sqrt{\frac{l}{g}}$$

அல்லது $$n = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10.3$$

இனி, l, $l + dl$ ஆகவும் g, g + dg ஆகவும் மாறும்போது n, n + dn ஆக மாறுவதாகக் கொள்வோம்.

$$n + dn = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g+dg}{l+dl}}$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \times \left(1+\frac{dg}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(1+\frac{dl}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \times \left(1+\frac{dg}{2g}\right) \times \left(1-\frac{dl}{2l}\right)$$

$$n+dn = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1+\frac{dg}{2d}-\frac{dl}{2l}\right)$$

தோராயமாக ... 10·4

சமன்பாடு 10·4-ஐச் சமன் 10·3-ஆல் வகுக்க

$$\frac{n+dn}{n} = 1 + \frac{dg}{2g} - \frac{dl}{2l}$$

அல்லது $$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g} - \frac{dl}{l}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10·5$$

சிறப்பு நேர்வுகள் :

1. g-ன் மதிப்பு மாறுமல் ஊசலின் நீளம் மாறும்போது,

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l}$$

அல்லது $$dn = \frac{-n}{2}\frac{dl}{l}$$

எனவே, நீளம் அதிகமாகும்போது அலைவுகளின் எண்ணிக்கை குறைகிறது ; கடிகாரம் மெதுவாகச் செல்லும்.

2. நீளம் மாறுமல் g-ன் மதிப்பு மாறும்போது,

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

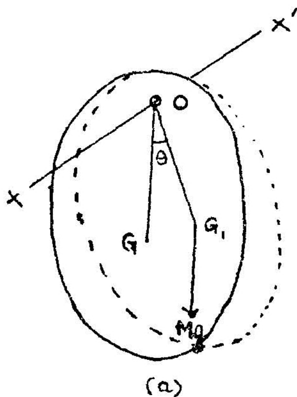
அல்லது $$dn = \frac{n}{2}\frac{dg}{g}$$

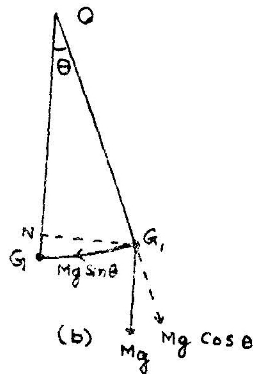
எனவே, g-ன் மதிப்பு அதிகமாகும்போது, அலைவுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும் ; அதன் பயனாய்க் கடிகாரம் வேகமாகச் செல்லும்.

கணக்குகளைச் செய்யும்போது n என்பதை ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் உள்ள பாதி அலைவுகளின் எண்ணிக்கை என்று கொள்வது, கணக்குகளை எளிதாக்கும். சமன் 10·5-ல் n என்பது பாதி அலைவுகளின் எண்ணிக்கை எனில், dn என்பது பாதி அலைவு களின் எண்ணிக்கையில் ஏற்படும் மாறுபாடாகும்.

2. கூட்டு ஊசல் (Compound pendulum):

ஒரு திண்பொருள் அதன் ஒரு புள்ளிவழியே செல்லும் ஒரு கிடைத்தள அச்சைப்பற்றிச் செங்குத்துத் தளத்தில் ஊசலாடு மாயின், அது கூட்டு ஊசல் எனப்பெறும்.





படம் 10·2

படம் 10·2 அத்தகைய பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் (G) வழியே செல்லும் செங்குத்துத்தள வெட்டுமுகத்தைக் குறிக்கிறது. பொருள், O என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப் (XOX') பற்றிச் சுழலக்கூடியதாயுள்ளது. அப் புள்ளி (O) தொங்கு மையம் (centre of suspension) எனப்படும். பொருள் சம நிலையில் இருக்கும்போது OG செங்குத்தாக இருக்கும்.

இப்பொழுது, பொருளை அதன் சமநிலையிலிருந்து சற்று அசைத்துவிடுவோமாயின், அது முன்னும் பின்னும் இயங்கும்.

பொருளின் இந்த இயக்கம் அதன் கோண இடப்பெயர்ச்சியின் சிறு மதிப்புகளுக்கு ஒரு சீரிசை இயக்கம் எனப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

பொருள் இயங்கும்போது, அதன் சமநிலையிலிருந்து θ என்ற கோண இடப்பெயர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கும் ஒரு கணத்தைக் கருதுவோம். அக் கணத்தில் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G என்ற புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோமாயின்,

$$\widehat{GOG_1} = \theta$$

பொருளின் நிறை M, OG = h என்றால், குறிப்பிட்ட கணத்தில் பொருளின்மீது செயற்படும்

மீட்பு விசை = Mgh $\sin\theta$ (படம் 10·2 b)

XOX′ அச்சைப்பற்றிய பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன் I எனில்,

மீட்பு விசை $= I\frac{d^2\theta}{dt^2}$ [சமன் 9·5-ல் $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$]

கோண இடப்பெயர்ச்சி இந்த மீட்புவிசைக்கு எதிர்த்திசையில் இருப்பதால், பொருளின் இயக்கத்திற்கான சமன்பாட்டை

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\sin\theta$$

என எழுதலாம்.

அல்லது $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\sin\theta$$

θ-ன் மதிப்பு சிறியதாயிருக்கும்போது, $\sin\theta = \theta$ ஆதலால்,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 10{\cdot}6$$

சமன் 10·6-ல் $\frac{Mgh}{I}$ ஒரு மாறிலியாதலால், பொருளின் இயக்கம் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகும். அதன் அலைவு நேரம்,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 10{\cdot}7$$

மேலும், பொருளின் அது சுழலக்கூடிய அச்சைப் (XOX′) பற்றிய சுழற்சி ஆரம் K எனில், $I = MK^2$

எனவே, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2}{gh}}$$

குறிப்பிட்ட அச்சிற்கு இணையாகப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் ஓர்அச்சைப்பற்றிய சுழற்சி ஆரம் K என்றால்,

$$MK^2 = MK^2 + Mh^2$$

அல்லது $K^2 = K^2 + h^2$

எனவே, $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{K^2+h^2}{gh}}$ ... ... 10·8

மற்றொரு முறை : சமன் 10·8-ஐ ஆற்றல் அழியாமை விதிப் படி பின்வருமாறும் பெறலாம்.

பொருள் θ என்ற கோண இடப்பெயர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கும் கணத்தில், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் உயர்த்தப்பட்டிருக்கும் தொலைவு

$$\begin{aligned} GN &= OG - ON \quad (9{\cdot}16a) \\ &= h - h\cos\theta \\ &= h(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

எனவே, அந் நிலையில்

பொருளின் நிலையாற்றல் $= Mgh\,(1-\cos\theta)$

மேலும், அக் கணத்தில் பொருளின் கோணத் திசைவேகம் w எனில்,

இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} I\, w^2$

$$= \frac{1}{2} MK^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

ஆற்றல் அழிவின்மை விதிப்படி

$\frac{1}{2} Mk^2 \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + Mgh\,(1-\cos\theta) =$ ஒரு மாறிலி.

பகுதி காணின்

$$\frac{1}{2} MK^2\, 2\,\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgh\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = 0$$

அல்லது, θ சிறியதாயிருக்கும்போது $\sin\theta = \theta$ ஆதலால்,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{K^2}\,\theta$$

எனவே, பொருளின் இயக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும். அதன்

அலைவு நேரம் $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{K^2}{gh}}$

அல்லது $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{K^2+h^2}{gh}}$

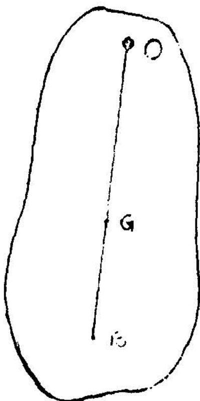
இணைமாற்று இலகு ஊசல் (equivalent simple pendulum) :

கூட்டு ஊசலின் அலைவு நேரத்திற்குச் சமமான அலைவு நேரத்தைக்கொண்ட தனி ஊசல், இணைமாற்றுத் தனி ஊசல் எனப் படும்.

கூட்டு ஊசலின் அலைவு நேரத்திற்கான சமன்பாடு 10·8-ஐ இலகு ஊசலின் அலைவு நேரத்திற்கான $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ என்ற சமன் பாட்டுடன் ஒப்புநோக்குவோமாயின், இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளம் $L=\frac{K^2+h^2}{h}=\frac{K^2}{h}$ ... ... 10·9

கூட்டு ஊசலில் OG-ஐ நீட்டிவிட்டு அதில் $OB=\frac{k^2}{h}$ என்னு மாறு B என்ற ஒரு புள்ளியைக் காண்போமாயின், [படம் 10·3] OB இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளமாகும். மேலும், B என்ற புள்ளி அலைவு மையம் (centre of oscillation) எனப்படும். அலைவு மையத்தில் பொருள் திடீரெனத் தாக்கப்படின், அது O வழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றிச் சுழலுமேயொழியக் கீழே விழாது. இதன் காரணமாக அலைவுமையம் தாக்கு மையம் (centre of percussion) எனவும் அழைக்கப்படும்.

அலைவு மையமும் தொங்கு மையமும் : அலைவு மையமும் தொங்கு மையமும் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபடும் தன்மையை யுடையன. படம் 10·3 ல் O, தொங்கு மையத்தையும் C, அலைவு மையத்தையும் குறிக்கின்றன. $OG=h_1$ எனில்



படம் 10·3

$$OB=L=\frac{K^2+h_1^2}{h_1}$$

$$K^2=h_1(L-h_1)$$

அல்லது $K^2=OG,GB$

$GB=h_2$ எனில்,

$$K^2=h_1\,h_2 \quad \dots \quad \dots \quad 10{\cdot}10$$

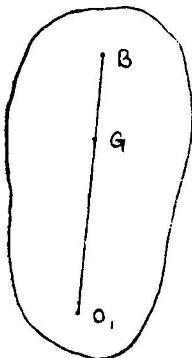
இனி, பொருளைத் தலைகீழாக மாற்றி C என்ற புள்ளியில் தொங்கவிடுவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது O_1 என்ற புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கருதுவோமாயின் (படம் 10·4) இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளம்

$$BO_1 = \frac{K^2 + BG^2}{BG}$$

அல்லது $K^2 = O_1 G . G B$

K^2-க்கான இரு சமன்பாடுகளையும் ஒப்புநோக்குவோமாயின்

$OG = O_1 G.$



படம் 10·4

எனவே, O_1, O-உடன் ஒன்றும். அதாவது O பொருளின் புதிய அலைவு மையமாகச் செயற்படும். மேலும், பொருள் B வழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றி ஊசலாடும் போதும் இணைமாற்று ஊசலின் நீளம் OB ஆகும். எனவே, O, B ஆகியவற்றைப்பற்றிய ஊசலின் அலைவு நேரங்கள் சமமாகும். இவ்வாறுக O-ம், B-ம் அதாவது தொங்கு மையமும் அலைவு மையமும் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபடும் தன்மையனவாகும்.

மேலும், ஊசலானது

O-ஐப்பற்றி அலையும்போது, அதன் அலைவு நேரம்

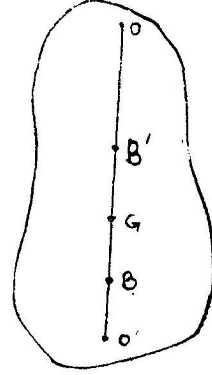
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h_1^2}{h_1 g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad 10{\cdot}11$$

B-ஐப் பற்றி அலையும்போது அதன் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h_2^2}{h_2 g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad 10{\cdot}12$$

சமன்பாடு 10·11-ன்படி G-லிருந்து $OG = h_1$ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய அலைவு நேரம் T ஆகும். எனவே, OG-ஐ நீட்டிவிடப்பட்ட கோட்டில் G-லிருந்து h_1 தொலைவில் O′ என்ற ஒரு புள்ளியைக் கண்டாலும் O′ வழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றிய ஊசலின் அலைவு நேரமும் T ஆகும். அவ்வாறே சமன் 10·12-ன் படி G-லிருந்து $GB = h_2$ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய அலைவு நேரம் T ஆதலால்G-க்கும் O-க்குமிடையே

G-லிருந்து h_2 தொலைவில் உள்ள B′ என்ற ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய அலைவு நேரம் T ஆகும். இவ்வாறாக உண்மையில் G-உடன் நேர்க்கோட்டில் அமைந்த O, B′, B, O′ என்ற நான்கு புள்ளிகளைப்பற்றிய அலைவு நேரங்கள் சமமாகும் [படம் 10·5].



படம் 10·5

கூட்டு ஊசலின் அலைவு நேரத்தின் சிறும மதிப்பு :

கூட்டு ஊசலின் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+h^2}{hg}}$$

T-ன் மதிப்பு சிறுமமாகுமாயின்,

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{k^2+h^2}{h}\right) = 0$$

அதாவது $1-\frac{k^2}{h^2} = 0$

அல்லது $k = h$

எனவே, கூட்டு ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் இணையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சி ஆரம் தொங்குதானத்திலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்திற்குச் சமமாகும் போது, அதன் அலைவு நேரம் சிறும மதிப்பைப் பெறும்.

கூட்டு ஊசலைப் பயன்படுத்தி g-ன் மதிப்பையறிதல்

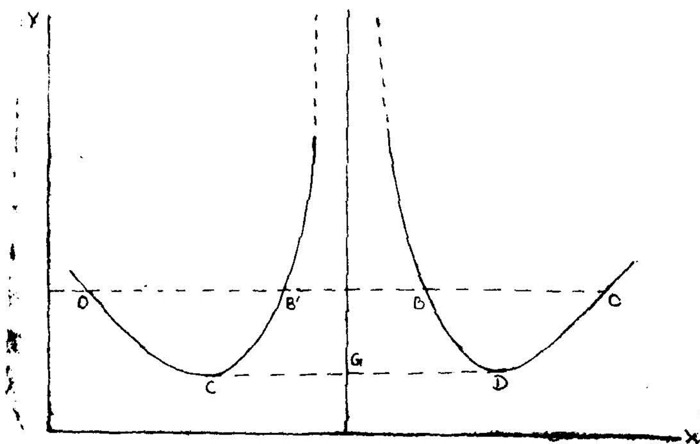
சோதனைக்கான கூட்டு ஊசல் வழக்கமாக பலதுளைகள் செய்யப்பட்ட ஓர் உலோகப் பட்டையாகும். [படம் 10·6] ஊசலை வெவ்வேறு துளைகளின் வழியே ஒரு தக்க கத்தி முனையிலிருந்து தொங்கவிட்டு அலைவுறுமாறு செய்யலாம்.

படம் 10·6

ஒரு குறிப்பிட்ட அலைவு நேரத்தையுடைய இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளத்தை மதிப்பிடுவதே சோதனையின் நோக்கமாகும்.

சோதனையின்போது, ஊசலின் ஒரு முனையிலிருந்து தெரிந்த மதிப்புகளையுடைய வெவ்வேறு தொலைவுகளில் உள்ள துளைகளின்வழியே ஊசலைத் தொங்கவிட்டு அலைவு நேரங்களைக் கணக்கிட வேண்டும்.

இனி, $T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{hg}}$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருத்திற் கொள்வோமாயின், புவியீர்ப்பு மையத்தில் h-ன் மதிப்பு சுழியாதலால் T-ன் மதிப்பு முடிவிலியாகும். h-ன் மதிப்பு அதிகமாகும்போது அதன் சிறும மதிப்புகளுக்கு $(k^2 + h^2)$-ன் மதிப்பு அவ்வளவாக அதிகமாவதில்லை. எனவே, T-ன் மதிப்பு குறையும். இம் மதிப்புக் குறைவு T-ன் சிறும மதிப்புவரை நிகழும். h-ன் மதிப்பு T-ன் சிறும மதிப்புக்குரிய மதிப்பிற்கு மேலும் அதிகமாகும்போது, $(k^2 + h^2)$-ன் மதிப்பு விரைந்து அதிகமாவது காணப்படுகிறது. எனவே, T-ன் மதிப்பும் அதிகமாகிறது. இவ்வாறாக ஊசலின் தொங்குதானம் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து விலகிச் செல்லும்போது, அலைவு நேரம் முதலில் குறைந்து, ஒரு சிறும மதிப்பை அடைந்தபின் அதிகமாகிறது. எனவே, ஊசலின் ஒரு முனையிலிருந்து பல்வேறு தொலைவுகளில் ஊசலைத் தொங்கவிட்டுக் கணக்கிடப்பட்ட அலைவு நேரங்களை y அச்சிலும், அவற்றிற்குரிய தொலைவுகளை, அதாவது ஒரு முனையிலிருந்து தொங்குதானங்களின் தொலைவுகளை x அச்சிலும் குறித்து ஒரு வரைபடம் வரைவோமாயின், கிடைக்கப்பெறும்



படம் 10·7

வரைகோடு படம் 10·7-ல் உள்ளதுபோல் அமையும். ஒரு குறிப்பிட்ட அலைவு நேரத்திற்கு வரைபடத்தில் நான்கு புள்ளிகள் இருப்பதைக் காணலாம். இப் புள்ளிகள் படம் 10·5-ல் உள்ள O, B', B, O'

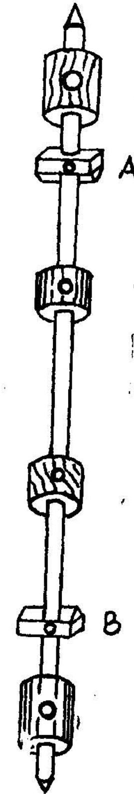
ஆகிய புள்ளிகளை ஒத்தவைகளாகும். எனவே, வரைபடத்திலிருந்து இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளத்தை (L) [அதாவது OB அல்லது O'B' அல்லது $\frac{OB+O'B'}{2}$] மதிப்பிட்டுக் கொள்ளலாம். அந்த நீளத்திற்குரிய T-ன் மதிப்பைத் தெரிந்து, g-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக்கொள்ளலாம். வெவ்வேறு அலைவு நேரங்களுக்குரிய இணை மாற்றுத் தனி ஊசல்களின் நீளங்களைக் கணக்கிட்டு ஒவ்வொரு முறையும் g-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு அதன் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக்கொள்ளலாம்.

மேலும், $k^2 = h_1 h_2$ (சமன் 10·10) ஆதலாலும் T-ன் சிறும மதிப்பின்போது $h_1 = h_2$ ஆதலாலும் $h_1 = h_2 = h$ என்றால் $k = h$ ஆகும். படம் 10·7-ல் $GC = GD = h$ ஆகும். எனவே, வரைபடத்திலிருந்து k-ன் மதிப்பையும் அறியலாம்.

கேட்டர் ஊசல் (Kater's pendulum)

கூட்டு ஊசல் ஒன்றின் அலைவு மையமும் தொங்கு மையமும் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபடும் தன்மையைப் பயன்படுத்தி, கேட்டர் என்பவர் g-ன் மதிப்பைக் கண்டார்.

கேட்டர் ஊசலில் ஒரு நீண்ட உலோகத் தண்டு உள்ளது. தண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கு இரு புறமும் ஒன்றையொன்று நோக்குமாறு A, B, என்ற இரு கத்திமுனைகள் உள்ளன. படம் (10·8) ஊசல் இவற்றுள் ஒன்றைப்பற்றி இயங்கும் கத்தி முனைகளைத் தவிர, தண்டின்மீது நகரக் கூடிய இரு உலோக உருளைகளும் இரு மர உருளைகளும் உண்டு. இவற்றைத் தண்டின்மீது எந்த இடத்திலும் திருகாணிகளின் உதவியால் பொருத்திக்கொள்ளமுடியும். சோதனையின் போது இரு கத்தி முனைகளைப்பற்றிய அலைவு நேரங்கள் சமமாக இருக்குமாறு செய்ய வேண்டும். அதாவது, கத்தி முனைகளுள் ஒன்று அலைவு மையமாகவும், மற்றொன்று தொங்கு மையமாகவும் செயற்படவேண்டும். இவ்வாறு செயற்பட வேண்டுமாயின், அவை ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து வெவ்வேறு தொலைவுகளில் இருக்கவேண்டும். இதனைத் தண்டின்மீது உலோக உருளையின் நிலையைத் தக்கவாறு மாற்றியமைத்து ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையத்தை மாற்றியமைப்பதன்மூலம் செய்யலாம்.



படம் 10·8

இவ்வாறு ஊசலின் இரு கத்தி முனைகளைப்பற்றிய அலைவு நேரங்கள் சமமாக இருக்கும்படி செய்தபின், அவற்றின் இரு முனை களுக்கிடையேயுள்ள தொலைவை நுட்பமாக அளவிட்டால், அது இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளத்தைக் (L) கொடுக்கும். எனவே, $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி g-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

ஆனால், ஊசலின் இரு கத்திமுனைகளைப்பற்றிய அலைவு நேரங்கள் சமமாக இருக்கும்படி செய்வது அவ்வளவு எளிதன்று. பெஸ்ஸல் (Bessel) என்பவர் ஊசலின் இரு கத்தி முனைகளைப்பற்றிய அலைவு நேரங்கள் சரிசமமாக இல்லாமல், ஏறத்தாழ சமமாக இருப் பினும் g-ன் மதிப்பை நுட்பமாக அளவிட முடியும் என நிறுவினர்.

A, B ஆகிய இரு கத்திமுனைகளைப்பற்றிய ஏறத்தாழ சமமான அலைவு நேரங்கள் முறையே T_1, T_2 என்றும் அந் நிலையில் ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து அவற்றின் தொலைவுகள் முறையே, h_1, h_2, என்றும் கொள்வோமாயின்,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+k^2}{h_1 g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 10{\cdot}13$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+h_2^2}{h_2 g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 10{\cdot}14$$

சமன்பாடுகள் 10·13, 10·14 ஆகியவற்றை இருமடியாக்கி மாற்றியமைப்போமாயின்

$$\frac{g}{4\pi^2}\cdot h_1 T_1^2 = k^2+h_1^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 10{\cdot}15$$

$$\frac{g}{4\pi^2}\, h_2 T_2^2 = k^2+h_2^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 10{\cdot}16$$

சமன்பாடு 10·16-ஐ 10,15-லிருந்து கழிக்க

$$\frac{g}{4\pi^2}\left[h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2\right] = h_1^2 - h_2^2$$

அல்லது $\frac{g}{4\pi^2}\,\frac{h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2}{h_1+h_2} = h_1 - h_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad 10.17$

இனி $\frac{T_1^2+T_2^2}{2} = a$, $\frac{T_1^2 - T_2^2}{2} = b$ என்று குறிப்பிடுவோ மாயின் $T_1^2 = a+b$, $T_2^2 = a-b$.

சமன் 10·17-ல் T_1^2, T_2^2 ஆகியவற்றின் மேற்கண்ட மதிப்பு களைப் பதிலீடு செய்வோமாயின்

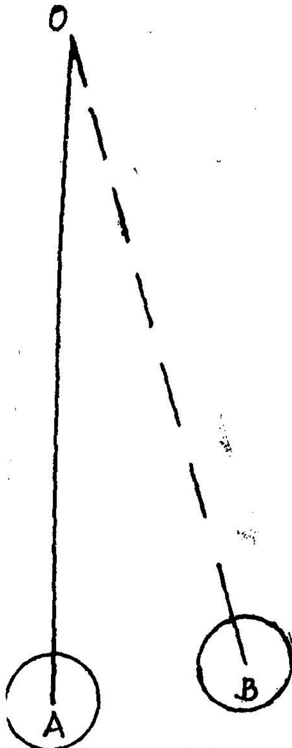
$$\frac{g}{4\pi^2}\left[\frac{a(h_1-h_2)+b(h_1+h_2)}{h_1-h_2}\right]=h_1+h_2$$

அல்லது $$\frac{g}{4\pi^2}\left[a+\frac{b(h_1+h_2)}{h_1-h_2}\right]=h_1-h_2$$

எனவே, $$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{a}{h_1+h_2}+\frac{b}{h_1-h_2}$$

அல்லது, $$\frac{8\pi^2}{g}=\frac{T_1^2+T_2^2}{h_1+h_2}+\frac{T_1^2-T_2^2}{h_1-h_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad 10{\cdot}18$$

சமன். 10·18-ல் (h_1+h_2) என்பது இரு கத்திமுனைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு ஆதலால், அதன் மதிப்பை நுட்பமாக அளவிட முடியும். ஆனால், புவியீர்ப்பு மையத்தின் (G) நிலையை நுட்பமாக மதிப்பிட முடியாதாகையால் h_1, h_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் (h_1-h_2)-ன் மதிப்பையும் நுட்பமாகக் காணமுடியாது. ஊசலைத் தக்க கத்திமுனை ஒன்றின் மீது சமநிலையில் நிறுத்தி G-ன் நிலையைத் தோராயமாக மதிப்பிட்டு h_1, h_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைத் தோராயமாக மதிப்பிடலாம். மேலும் (h_1-h_2)-ஆனது, $T_1^2-T_2^2$ என்ற மிகச்சிறிய மதிப்பை மேலெண்ணாகக் கொண்ட பின்னத்தின் கீழெண்ணாக வருவதால் அதன் மதிப்பீட்டில் ஏற்படும் சிறுபிழை g-ன் மதிப்பைப் பாதிக்காது.



படம் 10·9

போர்டா ஊசல் (Borda's pendulum)

போர்டா, காஸினி (cassini) என்ற இரு விஞ்ஞானிகள் பாரிசில் வினாடி ஊசலின் நீளத்தையும் g-ன் மதிப்பையும் நுட்பமாக அளவிட ஒரு தனிவகை ஊசலைப் பயன்படுத்தினர். அந்த ஊசல் போர்டா ஊசல் எனப்படும். அதன் அமைப்பைப் படம் 10·9-ல் காணலாம். இதில் 10 செ. மீ. விட்டமுள்ள எடைமிக்க இரும்பு அல்லது ஈயக்குண்டு ஒரு நீளமான மெல்லிய கம்பியால் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது.

g-ன் மதிப்பைக்காண இலகு ஊசலில் உள்ளது போலவே அலைவு நேரத்தைக் காணவேண்டும். அதன் மதிப்பை T எனக் கொள்வோம். ஊசலின் தொங்குதானத்திலிருந்து குண்டின் புவியீர்ப்பு மையம்வரையுள்ள நீளத்தை ஊசலின் நீளமாக (L)க் கொள்வோம். போர்டா ஊசல் ஒரு தனி ஊசலைப் போன்றிருந்தாலும், உண்மையில் அது ஒரு கூட்டு ஊசலாகும். எனவே, அதன் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + h^2}{hg}}$$

போர்டா ஊசலின் குண்டின் ஆரம் a என்றால் $K^2 = \frac{2}{5} a^2$; மேலும், $h = l$.

$$\text{எனவே, } T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5}a^2 + l^2}{lg}}$$

$$\text{அல்லது } g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \left(\frac{2}{5} \frac{a^2}{l^2} + 1\right)$$

இந்த ஊசல் ஒரு கூட்டு ஊசலாகக் கருதப்படுவதால், குண்டு தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் கம்பியும் தொங்குதானத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் ஒன்றைப் பெற்றிருக்கும். மேலும், கம்பியும் குண்டும் சேர்ந்தே இயங்குவதில்லை. கோடி முனைகளில் கம்பியின் கீழ் முனையைப்பற்றிக் குண்டு தனியே இயங்குவதால் அவைகளுக்கு இடையே ஒரு சார்பு இயக்கம் இருக்கும். இந்தப் பிழைகளின் பயனாய் இந்த ஊசலின் உதவியால் பெறப்பட்ட g-ன் மதிப்பு நுட்பமானதன்று.

இருநூல் ஊசல் ((Bifilar pendulum)

எடைமிக்க செவ்வக வடிவ உலோகக்கட்டை அல்லது தண்டு ஒன்று சமமான நீளமுடைய இரு நூல்களால் தொங்கவிடப்பட்டிருப்பின், அது இரு நூல் ஊசல் எனப்படும் (படம் 10·10.) நூல்கள் இரண்டும் இணையானவையாகவோ அல்லது செங்குத்து நிலைக்குச் சம அளவில் சாய்ந்தோ இருக்கலாம். பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்து அச்சைப்பற்றி அதனைச் சிறிது சுழற்றினால், அது சிறிது உயர்த்தப்படுவதைக் காணலாம். இதனால் அதன் நிலையாற்றல் அதிகமாகிறது. அந் நிலையிலிருந்து அதனை விட்டுவிட்டால் அது முன்னும் பின்னும் கோண அலைவுகளை மேற்கொள்ளும். இந்த அலைவுகள் சீரிசை இயக்கத்தை அமைக்கின்றன என நிறுவலாம்.

இணையான நூல்களை உடைய இரு நூல் ஊசலைச் சாய்ந்த நூல்களையுடைய ஊசலின் ஒரு சிறப்புவகையாகக் கருதலா மாதலால் சாய்ந்த நூல்களையுடைய ஊசலைப்பற்றி இங்குக் காண்போம். படம் 10·10-ல் AB, பொருளையும் AC, BD ஆகியவை நூல்களையும் குறிக்கின்றன. ஒவ்வொரு கயிற்றின் நீளத்தை l எனவும் நூல்களுக்கிடையேயுள்ள தொலைவுகள் $2a$ $(=AB)$ எனவும் உச்சியில் $2b$ $(=CD)$ எனவும் பொருளின் நிறை M எனவும் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் (G) வழியாகச் செல்லும் செங்குத்து அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் I எனவும் கொள்வோம்.

படம் 10·10

பொருளின் இயக்கத்தின்போது, அது θ என்ற கோண இடப்பெயர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம். அக் கணத்தில் பொருளின் நிலையைப் படம் 10·10-ல் AB_1 குறிக்கிறது. $\widehat{BGB_1} = \theta$ · மேலும் நூல்களின் தொங்கு தானங்களிலிருந்து பொருளின் ஆழம் y என இருக்கட்டும். படத்தில் $DB' = y$. θ-ன் மதிப்பு சிறியதாயிருப்பதால், $\widehat{B_1B'D}$ ஏறத்தாழ 90° ஆகும்.

இனி, $B_1B'D$ என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$B_1D^2 = DB'^2 + B'B_1^2$$

அல்லது $B'B_1^2 = BG^2 + GB'^2 - 2B_1G \cdot GB' \cos\theta$.

மேலும், $B_1D = l$; $DB' = y$ $B_1G = a$, $GB' = b$

$$\therefore \quad l^2 = y^2 + (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$

அல்லது $y^2 = l^2 - (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$

சமன் 10·19-ன் பகுதி காணின்

$$2y \cdot dy = -2ab\sin\theta \cdot d\theta$$

எதிர்குறி θ அதிகமாகும்போது y குறைவதைக் குறிக்கிறது.

பொருள் மேலும் $d\theta$ என்ற ஓர் இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்போது y-ன் மதிப்பு dy அளவு குறையும்.

நூல்கள் θ கோண அளவு முறுக்கப்படும்போது உருவாகும் இரட்டையின் திருப்புதிறன் C எனின், பொருள் மேலும் ஓர் இடப்பெயர்ச்சியைப் ($d\theta$) பெறும்போது செய்யப்படும் வேலை $Cd\theta$ ஆகும்.

பொருள் $d\theta$ என்ற கோண இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்போது, அது உயர்த்தப்படும் உயரம் dy ஆதலால், பொருளின் எடையை எதிர்த்துச்

செய்யப்படும் வேலை $= Mg\,dy$.

எனவே, $Cd\theta = Mg\,dy$

அல்லது $$C = -\frac{Mg\,ab\sin\theta}{y}$$

எதிர்குறி C கோண இடப்பெயர்ச்சிக்கு எதிர்த்திசையில் செயற்படுகிறது என்பதைக் குறிக்கிறது.

பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன் I என்றால்,

$$C = I\frac{dw}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (\text{சமன் } 9\cdot5)$$

மேலும், θ-ன் சிறும மதிப்புகளுக்கு $\sin\theta = \theta$; a, b ஆகியவற்றின் சிறும மதிப்புக்களுக்கு $y = l$ (சமன் 10·19)

$$\therefore \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mg\,ab\,\theta}{l}$$

அல்லது $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mg\,ab\,\theta}{Il} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 10\cdot20$$

சமன் 10·20-ல் $\frac{Mgab}{Il}$ ஒரு மாறிலியாதலால், பொருளின் இயக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும். அதன் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Il}{Mgab}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 10\cdot21$$

சமன் 10·21-லிருந்து

$$\frac{T^2ab}{l} = \frac{4\pi^2 I}{Mg} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad 10.22$$

பொருள் ஒரு குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றிச் சுழலும்போது I-ன் மதிப்பு மாருதாகையால் $\frac{4\pi^2 I}{Mg}$ ஒரு மாறிலியாகும். எனவே $\frac{T^2ab}{l}$-ம் ஒரு மாறிலியாகும். இந்த மாறிலி இருநூல் ஊசல் மாறிலி எனப்படும்.

சிறப்பு நேர்வு : ஊசலின் நூல்கள் இணையாக இருப்பின், a = b ஆகும். எனவே, $T = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{Mga^2}}$

பொருளின் பரிமாணங்களையும் நிறையையும் கணக்கிட்டு I-ன் மதிப்பை அறிய முடியுமாதலால், அலைவு நேரத்தை (T) மதிப்பிட்டு g-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

இரு நூல் ஊசலைக்கொண்டு ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான அச்சுகளைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்களை ஒப்புநோக்குவது வழக்கமாகும்.

இரு நூல் ஊசலில் தொங்கவிடப்பட்ட பொருள் x, y, z ஆகிய பக்கங்களையுடைய ஒரு கன செவ்வகம் எனக்கொள்வோம். அதன் x, y தளம் கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டு, அது அலைவுறும் பொழுது, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்து அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் I_1, அலைவு நேரம் T_1 என்ருல் சமன் 10·22-ன்படி

$$\frac{T_1 ab}{l} = \frac{4\pi^2}{Mg} \cdot I_1$$

அவ்வாறே பொருளின் yz, zx தளங்கள் கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டபோது, அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன்கள், அலைவு நேரங்கள் முறையே I_2, I_3; T_2 T_3 எனின்,

$$\frac{T_2{}^2 ab}{l} = \frac{4\pi^2}{Mg} \cdot I_2$$

$$\frac{T_3{}^2 ab}{l} = \frac{4\pi^2}{Mg} \cdot I_3$$

ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கு மூன்று சோதனைகளின்போதும் a, b, l ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் மாருமலிருக்குமாயின்,

$$I_1 : I_2 : I_3 :: T_1{}^2 : T_2{}^2 : T_3{}^2$$

முறுக்கு ஊசல் (Torsion pendulum)

முறுக்கு ஊசலைப் பயன்படுத்தி ஒரு பொருளின் நிலைமத் திருப்பு திறனைக் காணலாம். இதில் பொருள் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு மெல்லிய கம்பியின் மூலமாக, ஒரு நிலையான தாங்கியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கம்பியை அச்சாகக் கொண்டு பொருளைச் சிறிது சுழற்றினால் கம்பி முறுக்கப்படும் இந் நிலையில் பொருளை விட்டுவிட்டால், அது முறுக்கு அலைவுகளை மேற் கொள்ளும் பொருளின் கோண இடப்பெயர்ச்சி θ ஆக இருக்கும் ஒரு கணத்தைக் கருதுவோம். அந்தக் கணத்தில் அதன் கோண வேகம் $\frac{d\theta}{dt}$; கோண முடுக்கம் $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. கம்பியைப்பற்றிய பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன் I என்றால் குறிப்பிட்ட கணத்தில் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

கம்பியை ஓரலகு கோணம் முறுக்கும்போது அதில் உருவாகும் இரட்டை C என்றால் குறிப்பிட்ட கணத்தில் அதாவது பொருளின் கோண இடப்பெயர்ச்சி θ ஆக இருக்கும்போது கம்பியில் உரு வாகும் இரட்டை $C\theta$ ஆகும். பொருள் மேலும் $d\theta$ என்ற கோண இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறுமாயின் செய்யப்படும் வேலை $C\theta\ d\theta$ ஆகும். எனவே கம்பி θ கோண அளவுக்கு முறுக்கப்படும்போது செய்யப்படும் வேலை

$$w = \int_0^\theta C\theta\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2} C\theta^2$$

இவ்வாறு செய்யப்பட்ட வேலை குறிப்பிட்ட கணத்தில் பொருளின் நிலையாற்றலாக அமைகிறது.

எனவே, ஆற்றல் அழிவின்மை விதிப்படி

$$\frac{1}{2} I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} c\theta^2 = \text{ஒரு மாறிலி}$$

பகுதி காணின்

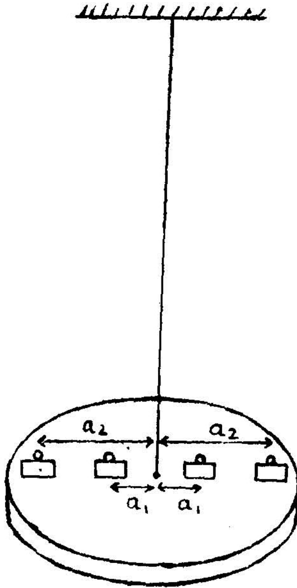
$$\frac{1}{2} I\, 2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} c 2\theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

எனவே $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{C}{I}\theta$ ... ... 10·23

சமன் 10·23-ல் C, I ஆகியவை மாறிலியாதலால், பொருளின் கோண முடுக்கம் அதன் கோண இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கிறது. எனவே, பொருளின் இயக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும்.

அதன் அலைவு நேரம் $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$ ... ... 10·24

முறுக்கு ஊசலைப் பயன்படுத்திப் பொருளின் நிலைமத் திருப்பு திறனைக் காணல்



படம் 10·11

இங்குப் பொருள் வட்டத் தட்டு வடிவில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டு அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் மெல்லிய கம்பி ஒன்றின் மூலமாகத் தொங்கவிடப் படுகிறது [படம் 10·11].

சோதனையைச்செய்ய இரண்டு சமமான நிறைகளை (m) கம்பியிலிருந்து சமதொலைவுகளில் சரிசீரமைவாக வைத்து ஊசலை இயக்கி அதன் அலைவு நேரத்தைக் காணவேண்டும். அதனை T_1 எனக் கொள்வோம். அடுத்து நிறைகளைக் கம்பியிலிருந்து வேறு தொலைவுகளில் (a_2) வைத்து அலைவு நேரத்தைக் காணவேண்டும். அது T_2 எனக்கொள்வோம். பின்னர் நிறைகளை நீக்கிவிட்டுத் தட்டைமட்டும் இயக்கி அலைவு நேரத்தைக் (T_0) காணவேண்டும்.

இனி, நிறைகளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்து அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் mk^2, கம்பியைப் பற்றிய தட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன் I_0 என்றால்,

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{I_0+mk^2+ma_1^2}{C}} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{I_0+mk^2+ma_2^2}{C}} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_0}{C}} \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii), (iii) ஆகியவற்றை இருமடியாக்கி மாற்றியமைப்போமாயின்,

$$\frac{C T_1^2}{4\pi^2} = I_o + 2mk^2 + 2ma_1^2 \qquad \ldots \qquad (iv)$$

$$\frac{C T_2^2}{4\pi^2} = I_o + 2mk^2 + 2ma_2^2 \qquad \ldots \qquad (v)$$

$$\frac{C T_o^2}{4\pi^2} = I_o \qquad \ldots \qquad (vi)$$

சமன்பாடுகள் (iv), (v)-லிருந்து

$$\frac{C}{4\pi^2}(T_2^2 - T_1^2) = 2m\,(a_2^2 - a_1^2)$$

சமன் (vi)-லிருந்து

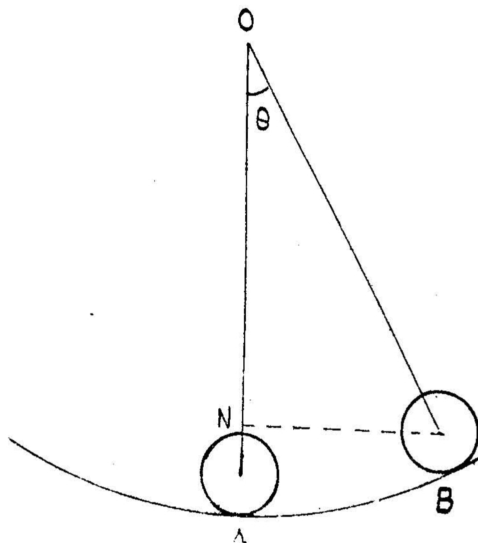
$$C = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot I_o.$$

எனவே, $\frac{I_o}{T^2}\,(T_2^2 - T_1^2) = 2m\,(a_2^2 - a_1^2)$

அல்லது $I_o = 2m\,\frac{a_2^2 - a_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \cdot T_o^2$ ... ... 10·5

சமன் 10·25-ல் m, a_1, a_2, T_1, T_2, T_o ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தெரியுமாதலால் I_o-ன் மதிப்பை அறியலாம்.

குழிதளத்தில் உருளும் கோளம்:



படம் 10·12

M என்ற நிறையையும் r என்ற ஆரத்தையும் கொண்ட வழ வழப்பான சிறுகோளம் ஒன்று R என்ற ஆரத்தையுடைய வழ வழப்பான குழிதளம் ஒன்றின்மீது உருளுவதாகக் கொள்ளுவோம். படம் 10·12-ல் O, குழிதளத்தின் வளைவு மையத்தையும் A, சமநிலையில் இருக்கும் கோளத்தையும் குறிக்கின்றன. சமநிலையிலிருந்து கோளத்தைச் சற்று உருட்டிவிட்டால் அது முன்னும் பின்னும் இயங்கும்.

கோளம் இயங்கும்போது அது B என்ற நிலையில் இருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம். $\widehat{AOB} = \theta$ என இருக்கட்டும். B-ல் அதன் நேர்க்கோட்டுத் திசை வேகம் v எனவும் கோணத்திசை வேகம் w எனவும் கொள்வோம். AB $= x$ எனக் கொள்வோமாயின்.

$$v = \frac{dx}{dt}; w = \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\,\frac{dx}{dt}.$$

B-ல் கோளத்தின் நிலையாற்றல் $= Mg{\cdot}AN$

$$= Mg\,(R-r)\,(1-\cos\theta)$$

$$= 2Mg\,(R-r)\,\sin^2\frac{\theta}{2}$$

θ சிறியதாயிருக்கும்போது,

B-ல் நிலையாற்றல் $= 2Mg\,(R-r)\,\frac{\theta^2}{4}$

$$= \frac{Mg}{2}(R-r)\,\theta^2$$

$$= \frac{Mg}{2}(R-r)\,\frac{x^2}{(R-r)^2}\;[\because x = (R-r)\theta]$$

$$= \frac{Mg\,x^2}{2(R-r)}$$

B-ல் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}Iw^2 + \frac{1}{2}Mv^2$

ஆனால் $I = \frac{2}{5}\,Mr^2$

$\therefore$ B-ல் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{5}Mr^2w^2 + \frac{1}{2}Mv^2$

$$= \frac{7}{10}Mv^2$$

$$= \frac{7}{10}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

ஆற்றல்அழிவின்மை விதிப்படி

$$\frac{7}{10}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{Mgx^2}{2(R-r)} = \text{ஒரு மாறிலி}$$

∴ பகுதி காணின்

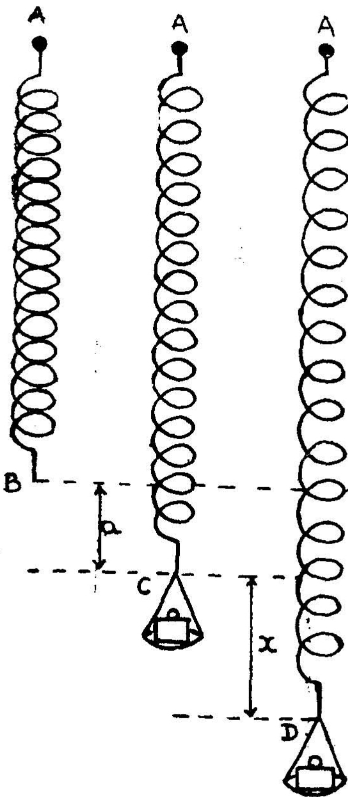
$$\frac{7}{10} M\, 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Mgx}{2\,R-r}\frac{dx}{dt}=O$$

அல்லது $$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{5g}{7(R-r)}x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\ 10.26$$

சமன் 10·26 ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்கும். எனவே கோளத்தின் அலைவு நேரம்.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\ 10.27$$

குழிதளத்தில் கோளத்தின் அலைவு நேரத்தையும், குழிதளத்தின் வளைவு ஆரத்தை ஒரு கோளமானியின் உதவியாலும், கோளத்தின் ஆரத்தை ஒரு வெர்னியர் காலிப்பரின் உதவியாலும் கணக்கிட்டுச் சமன்பாடு 10.27-லிருந்து g-ன் மதிப்பைப் பெறலாம். g-ன் தெரிந்த மதிப்பைப் பயன்படுத்திக் குழிதளத்தின் வளைவு ஆரத்தைக் கணக்கிடுவதும் உண்டு. அவ்வாறு குழிதளத்தின் வளைவு ஆரத்தைக் கணக்கிடப் பயன்படும் போது, இந்த அமைப்பு இயக்கவியல் கோளமானி (Dynamical spherometer) என அழைக்கப்படும்.



படம் 10·13

திருகுச் சுருள் வில்:

A என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு திருகுச் சுருள் வில்லின் B முனையில் M என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருள் இணைக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம் [படம் 10.93] பொருளைச் சற்றுக் கீழே இழுத்து விட்டுவிட்டால் அது வில்லுடன் சேர்ந்து ஒரு சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்ளும். வில்லின் B முனையில் இணைக்கப்பட்ட பொருள் சமநிலையில் இருக்கும்போது, அதன் எடையின் பயனாய் வில்லின் நீளம் (l)AB-லிருந்து AC-க்கு மாறுவதாகக் கொள்வோம். BC = a எனில், வில்லில் உருவாகும் இழுவிசை

$$T = \frac{E}{l} a \quad (சமன் \ 8.22)$$

ஒரு குறிப்பிட்ட சுருள்வில்லின் இயல்பான நீளம்(l) மாறிலி ஆதலால் $\frac{E}{l}(=\mu)$ ஒரு மாறிலியாகும்.

எனவே, $T=\mu a$

மேலும், பொருள் சமநிலையில் இருப்பதால்,

$$T = Mg$$

$$\text{எனவே, } \mu = \frac{Mg}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10.23$$

இனி, பொருளைச் சற்றுக் கீழே இழுத்துவிட்டு, அது அலைவுறும் போது பொருள் D என்ற நிலையில் இருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம். $CD=x$ எனக் கொள்வோமாயின், அந்தக் கணத்தில் வில்லின் நீளத்தில் ஏற்படும் மொத்த மாறுதல் $(a+x)$ ஆகும்.

இந் நிலையில் சுருள் வில்லின் இழுவிசை

$$T_1 = \mu\ a+x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10{\cdot}29$$

பொருளின்மீது மேல்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுபயன் விசை

$$= T_1 - Mg$$

$$= \mu(a+x) - \mu\ a \quad (சமன் \ 10.28, 10.29)$$

$$= \mu x$$

இவ் விசை, பொருளை அதன் சமநிலைக்கு மீட்கமுயல்வதால், அது மீட்பு விசையாகும். மேலும், அதன் பொருள் சமநிலையில் இருந்து x இடப்பெயர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கும்போது, அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$ என்றால், மீட்புவிசை $= M\frac{d^2x}{dt^2}$

மீட்புவிசை, இடப்பெயர்ச்சிக்கு எதிர்த்திசையில் இருப்பதால்,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

அல்லது
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{M}x.$$

ஒரு குறிப்பிட்ட சுருள் வில்லுக்கு μ, M ஆகியவை மாறிலிகளாதலால் பொருளின் முடுக்கம் அதன் இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. எனவே, அதன் இயக்கம் சீரிசை இயக்கம் ஆகும்.

அதன் அலைவு நேரம் $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\mu}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{M}{Mg/a}} \text{ (சமன் 10·28)}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 10{\cdot}30$$

அதாவது, பொருளின் அலைவு நேரம் வில்லின் நீளமிகுதிக்குச் சமமான நீளத்தையுடைய தனி ஊசலின் அலைவு நேரத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \quad g = 4\pi^2\frac{a}{T^2}$$

எனவே, பொருளைத் தொங்கவிடுவதால், வில்லில் ஏற்படும் நீளமிகுதிப்பாட்டையும் (a = Bc) வில்லின் அலைவு நேரத்தையும் கண்டு g-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

மேற்கூறப்பட்ட முறையில் வில்லின் நிறை, பொருளின் நிறையை நோக்குமிடத்து, மிகச்சிறியதாகக் கணக்கிடப்பட்டுப் புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால், வில்லும் சேர்ந்தே அலைவுறுவதால் நுட்பமான அளவீடுகளுக்கு அதையும் கணக்கிலெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். வில்லின் பயனுறு நிறை m என்றால் பொருள், வில் ஆகியவற்றின் அலைவு நேரம் $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{\mu}}$ ... ...10·31

ஆனால், m-ன் மதிப்பை நுட்பமாக அளவிட முடியாதாகையால் சோதனையின்போது அதனைப் பின்வருமாறு தவிர்த்துவிடுவது வழக்கம.

சோதனையை M-ன் இரு மதிப்புகளுக்குத் (M_1, M_2) திருப்பிச் செய்யவேண்டும். வில்லில் M_1, M_2 நிறைகளைத் தொங்கவிடும் போது, அலைவு நேரங்கள் முறையே T_1, T_2 என்றால்,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M_1+m}{\mu}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M_2+m}{u}}$$

எனவே, $$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}(M_1 - M_2) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 10{\cdot}32$$

மேலும், M_1, M_2 நிறைகளைத் தொங்கவிட்டபோது, வில்லின் நீளத்தில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடுகள் முறையே a_1, a_2 எனில்,

$$M_1 g = \mu a_1 ; \ M_2 g = \mu a_2 \quad (\text{சமன் } 9{\cdot}28)$$

எனவே, $g\,(M_1 - M_2) = \mu\,(a_1 - a_2)$

$$\frac{M_1 - M_2}{\mu} = \frac{a_1 - a_2}{g}$$

$\frac{M_1 - M_2}{\mu}$-ன் மதிப்பைச் சமன் 10·32-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்

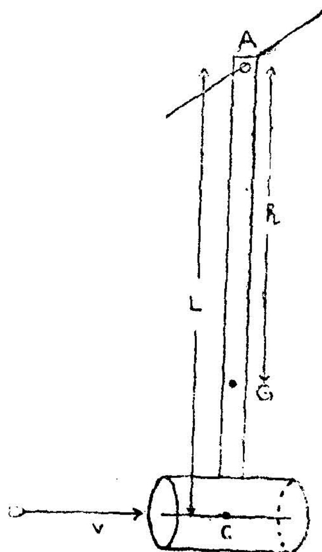
$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}(a_1 - a_2)$$

அல்லது $$g = 4\pi^2 \frac{a_1 - a_2}{T_1^2 - T_2^2}$$

எனவே, சுருள் வில்லில் M_1, M_2 ஆகிய நிறைகளை ஒவ்வொன்றாகத் தொங்கவிட்டு, வில்லில் பொருத்தப்பட்ட ஒரு குறிமுள்ளின் உதவியால், வில்லின் நீள மிகுதிப்பாடுகளையும் $(a_1 - a_2)$ ஒவ்வொரு முறையும் அலைவு நேரங்களையும் கணக்கிட்டு g-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக்கொள்ளலாம்.

உந்தவியல் ஊசல் (Ballistic pendulum)

இது, ஒரு துப்பாக்கி ரவையின் திசைவேகத்தை அளவிடப் பயன்படுகிறது. இது, ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் கோணத்தாக்கு அப்பொருளின் கோண உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதலுக்குச் சமம் என்னும் தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது. உந்தவியல் ஊசல் என்பது ஒரு தண்டின்மூலமாகத் தொங்கவிடப்பட்ட எடைமிக்க மர உருளையாகும்; தண்டு அதன் ஒரு முனை வழியாகச் செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப்பற்றிச் சுழலக்கூடியதாக இருக்கும். [படம் 10·14] ஊசலின் அலைவு மையம் தொங்கு மையத்திற்கு நேர் கீழே மர உருளையின் அச்சில் இருக்குமாறு ஊசலின் பரிமாணங்கள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. படத்தில்



படம் 10·14

AB என்பது தண்டு C, அலைவு மையம்; A, தொங்குதானம்; G, ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையம்.

மரஉருளையின் அச்சுக்கிணையாக v என்ற திசைவேகத்துடன் இயங்கும் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு ரவை உருளையைத் தாக்கி, அதில் பதிந்துவிடுவதாகக் கொள்வோம். இந்த மோதலினால் ஏற்பட்ட தாக்கு = ரவையின் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் = mv. இந்தத் தாக்கின் A-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன் அல்லது கோண உந்தம் = mvL ஆகும்.

இதன் பயனாய் ஊசல் w என்ற கோணத் திசை வேகத்துடன் புறப்படும். m-ன் மதிப்பு ஊசலின் மொத்த நிறை (M)யை ஒப்பு நோக்குமிடத்து, மிகச் சிறியதாயிருக்குமாதலால், A வழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றிய ஊசலின் நிலைமத் திருப்புதிறன் I என்றால்,

$$I\,w = m\,v\,L$$

அல்லது $$w = \frac{m\,v\,L}{I} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 10.33$$

மேலும், ஊசல்பெற்ற இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} I w^2$$

ஊசல்பெற்ற இந்த இயக்க ஆற்றலின் பயனாய் அது செங்குத்து நிலையிலிருந்து α கோண அளவிற்கு விலகுவதாகக் கொள்வோம். சமநிலையில் ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையம் தொங்கு தானத்திலிருந்து h ஆழத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோமாயின், விலகிய நிலையில் அது பெற்ற

நிலையாற்றல் $= Mgh\,(1-\cos\alpha)$

ஆற்றல் அழியாமை விதிப்படி,

$$\tfrac{1}{2} I w^2 = Mgh\,(1-\cos\alpha)$$

எனவே, $$w^2 = \frac{2Mgh}{I}(1-\cos\alpha)$$

$$= \frac{2Mgh}{I}\, 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

α-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4}$

$$\therefore \quad w^2 = \frac{Mgh}{I}\cdot\alpha^2$$

சமன் 10.33-ஆல் தரப்படும் ω-ன் மதிப்பைப் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$\frac{m'^2 v^2 L^2}{I^2} = \frac{Mgh}{I}\cdot\alpha^2$$

எனவே,

$$I = \frac{m'^2 v^2 L^2}{Mgh\,\alpha^2} \quad \dots \quad \dots \quad 10.34$$

இனி உந்தவியல் ஊசல் அலைவுறுமாயின், அதன் அலைவு நேரம்,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

$$\therefore \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{Mgh}$$

சமன் 10.34-ஐப் பதிலீடு செய்வோமாயின்,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m'^2 v^2 L^2}{M^2 g^2 h^2 \alpha^2}$$

அல்லது

$$v^2 = \frac{M^2 g^2 h^2 \alpha^2}{4\pi^2 m'^2 L^2}\cdot T^2$$

எனவே,

$$v = \frac{Mgh\,T\alpha}{2\pi\, m'L} \quad \dots \quad \dots \quad 10.35$$

சமன் 10·35-ல் வலப் புறத்திலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் அறிய முடியுமாதலால் v-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. வினாடி ஊசல் பொருத்தப்பட்ட ஒரு கடிகாரம் g-ன் மதிப்பு 32 அடி/வி.² என்றிருக்கும் ஓர் இடத்தில் ஒரு நாளில் 20 வினாடி மிகுதியாகக் காட்டுகிறது. அது சரியான நேரம் காட்டவேண்டுமாயின், அதன் நீளத்தில் செய்யப்படவேண்டிய மாறுதல் என்ன ?

கடிகாரம் 20 வினாடிகள் அதிகமாகக் காட்டுவதால் ஒரு நாளில் அது 20 பாதி அலைவுகள் அதிகமாக மேற்கொள்கிறது. கடிகாரம் சரியான நேரத்தைக் காட்ட அது மேற்கொள்ளும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கையில் 20 குறைக்கவேண்டும். எனவே, $dn = -20$. இது நீளத்தை l-லிருந்து $l - dl$-க்கு மாறுவதன்மூலம் செய்யப்படுவதாகக் கொள்வோம். மேலும், ஊசல் ஒரு நாளில் மேற்கொள்ளக் கூடிய பாதி அலைவுகள் ($n =$) $24 \times 60 \times 60$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dn}{n} = -\frac{dl}{2l}$$

அல்லது

$$\frac{-20}{24 \times 60 \times 60} = \frac{-dl}{2l}$$

அல்லது $dl = \frac{20}{24 \times 60 \times 60} \times 2l$

மேலும், வினடி ஊசலின் அலைவு நேரம் 2 வினடி ஆதலால்

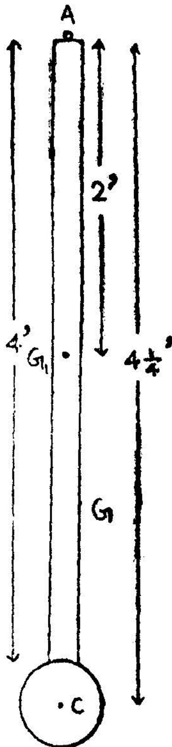
$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

அல்லது $1 = \pi^2 \frac{l}{g}$

$$\therefore \quad l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{32}{\pi^2}$$

$$\therefore \quad dl = \frac{20 \times 2 \times 32}{24 \times 60 \times 60 \times \pi^2} \times 12 \text{ அங்.}$$

$$= 0{\cdot}018 \text{ அங்.}$$



படம் 10.15

எனவே, ஊசலின் நீளம் 0.018 அங்குலம் அதிகமாக்கப்படவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 2. 3 பவு. நிறையும் 4 அடி நீளமும் கொண்ட ஒரு தண்டும், அதன் ஒரு முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ள 16 பவு. நிறையும், 3 அங்குலம் ஆரமும் கொண்ட ஒரு கோளமும் சேர்ந்த அமைப்பு ஒரு கூட்டு ஊசலாகப் பயன் படுகிறது. ஊசல் தண்டின் மறுமுனையைப் பற்றிய அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

ஊசலின் அமைப்பைப் படம் 10·15-ல் காண லாம். A, தொங்கு தானத்தையும் G_1, தண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் G, அவையிரண்டும் சேர்ந்த புவியீர்ப்பு மையத்தையும் குறிக்கின்றன. ஊசல் படத்தின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாக A-வழி யாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றி இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

இனி, ஊசலின் A-ஐப்பற்றிய சுழற்சி ஆரம் k, தொங்குதானத்திலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத் தின் ஆழம் h (=AG) என்றல் ஊசலின் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{hg}}$$

G_1, C, G ஆகியவற்றில் செயற்படும் எடைகள் முறையே 4 பவு, 16 பவு, 20 பவு.: ஆதலால் A-ஐப்பற்றிய அவற்றின் திருப்பு திறன்களைக் காணின்,

$$AG \times 19 = 2 \times 3 + \frac{17}{4} \times 16$$

$$= 74.$$

$$\therefore \qquad h = AG = \frac{74}{19} \text{ அடி.}$$

A-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் :

கோளத்தின் மையம் வழியாக, படத்தின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் m_2k^2 $(k^2 = \frac{2}{5}r^2)$ என்றால் ஊசலின் A-ஐப் பற்றிய மொத்த நிலைமத் திருப்புதிறன்

I = தண்டின் A-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் + A-ஐப் பற்றிய கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

அதாவது $I = m_1 \frac{l^2}{3} + m_2 (k^2 + a^2)$

ஆனால், $l = 4$ அடி; $k^2 = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$; $a^2 = \left(\frac{17}{4}\right)^2$

$$\therefore \quad I = 3 \times \frac{16}{3} + 16\left[\frac{2}{5} \times \frac{1}{16} + \frac{289}{16}\right]$$

$= 305 \cdot 4$ பவு.—அடி^{2}

ஊசலின் மொத்த நிறை M என்றால்,

$$I = Mk^2 = 305 \cdot 4$$

அல்லது $\qquad 19\,k^2 = 305 \cdot 4$

அதாவது, $\qquad k^2 = \frac{305 \cdot 4}{19}$

$$\therefore \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{hg}} \quad (\text{சமன் } 10 \cdot 9)$$

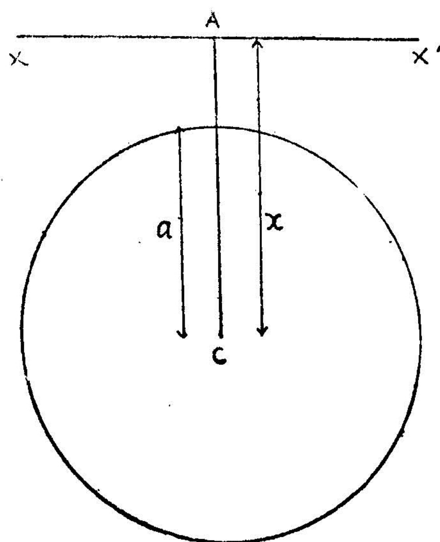
$$= 2\pi \sqrt{\frac{305 \cdot 4/19}{74/19 \times 32}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{305 \cdot 4}{74 \times 32}}$$

T = 2·256 வினாடிகள்.

மாதிரிக் கணக்கு 3. *சீரான சமதள தட்டு ஒன்று அதன் தளத்தில் அமையும் கிடைமட்ட அச்சிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அந்த அச்சைப்பற்றிய அதன் அலைவு நேரம் சிறுமமாக இருக்கும்போது, தட்டின் மையத்திலிருந்து அதன் தொலைவு தட்டின் ஆரத்தில் பாதியாகும் என நிறுவுக.*

படம் 10·16-ல் $x\,x'$-ஐப்பற்றி வட்டத்தட்டு அலையக்கூடியதாயுள்ளது. தட்டின் மையம் படத்தளத்திற்குச் செங்குத்தான



படம் 10·16

தளத்தில் அலைவுறுகிறது. தட்டின் நிறையை M என்றும் ஆரத்தை 'a' என்றும் கொள்வோமாயின், தட்டின் $x\,x'$-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \frac{Ma^2}{4} + Mx^2 \quad \text{(இணையச்சுகளின் தேற்றம்).}$$

$$= M\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)$$

$$= M\,k^2$$

$$\therefore \quad k^2 = \frac{a^2}{4} + x^2$$

$x = h$ எனில் சமன் 10·9-ன் படி இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளம்

$$L = \frac{\frac{a^2}{4} + x^2}{x} = \frac{a^2}{4x} + x.$$

அலைவு நேரம் சிறுமமாயிருக்கும்போது,

$$\frac{dL}{dx} = \text{சுழியாகும்.}$$

அதாவது, $$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^2}{4x} + x\right) = 0$$

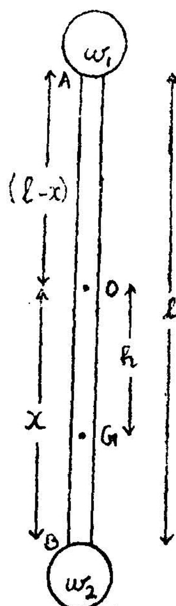
அதாவது, $$\frac{-a^2}{4x^2} + 1 = 0$$

அல்லது $$a^2 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4}$$

எனவே, $$x = \frac{a}{2}.$$

மாதிரிக் கணக்கு 4. ஓர் ஊசலில் l அலகு நீளமுடைய ஒரு தண்டின் முனைகளில் இரு கோளங்கள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. மேலே யுள்ள கோளத்தின் நிறை w ; கீழேயுள்ள கோளத்தின் நிறை w_2. கிடை மட்டத்திலுள்ள சுழற்சி அச்சு தண்டில் அதன் கீழ் முனையிலிருந்து x தொலைவில் உள்ள புள்ளி வழியாகச் செல்லு கிறது. தண்டின் எடையையும் கோளங்களின் பரிமாணங்களையும் புறக்கணிப்போமாயின், ஊச லின் பெரும அலைவு அடுக்கத்தைப் (frequency) பெறுவதற்கான x-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.



படம் 10·17

படம் 10·17-ல் O, தொங்குதானத்தையும் G, புவியீர்ப்பு மையத்தையும், AB, தண்டையும் குறிக்கின்றன. $OB = x$ எனவும் $OG = h$ எனவும் கொள்வோம். $AB = l$.

$$h = \frac{w_1 (l - x) + w_2 x}{w_1 + w_2}$$

$$= \frac{x (w_2 - w_1) + w_1 l}{w_1 + w_2}$$

O-ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = w_1 (l - x)^2 + w_2 x^2$$
$$= x^2(w_1 + w_2) + w_1 l^2 - 2w_1 lx$$
$$= (w_1 + w_2) k^2$$

$$\therefore \quad k^2 = \frac{x^2 (w_1 + w_2) - 2w_1 lx + w_1 l^2}{w_1 + w_2}$$

எனவே, இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளம்

$$L = \frac{k^2}{h} = \frac{x^2 (w_1 + w_2) - 2w_1 lx + w_1 l^2}{x(w_2 - w_1) + w_1 l}$$

அலைவு அடுக்கம் பெருமமாயிருக்க அல்லது அலைவு நேரம் சிறுமமாயிருக்க

$$\frac{dL}{dx} = 0$$

எனவே $$\frac{dL}{dx} = \{[x(w_2 - w_1) + w_1 l]\ [2x(w_1 + w_2) - 2w_1 l] -$$
$$[x^2(w_1 + w_2) - 2w_1 lx + w_1 l^2]\ (w_2 - w_1)\} \div$$
$$[x(w_2 - w_1) + w_1 l]^2 = 0$$

$$\therefore \quad [x(w_2 - w_1) + w_1 l][2x\ w_1 + w_2) - 2w_1 l] -$$
$$[x^2(w_1 + w_2) - 2w_1 lx + w_1 l^2]\ (w_2 - w_1) = 0$$

அதாவது, $$x^2 (w_2^2 - w_1^2) + 2w_1 lx(w_1 + w_2) - w_1 l^2 (w_1 + w_2) = 0$$

அல்லது $$x^2(w_1 - w_2) - 2w_1 lx + w_1 l^2 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2w^2 l \pm \sqrt{[4w_1^2 l^2 - 4w_1 l^2 (w_1 - w_2)]}}{(2w_1 - w_2)}$$

$$= \frac{2w_1 l \pm 2l\sqrt{w_1 w_2}}{2(w_1 - w_2)}$$

$$= \frac{w_1 l \pm l\sqrt{w_1 w_2}}{w_1 - w_2}$$

எனவே, $l\sqrt{w_1 w_2}$-ன் நேர்குறி மதிப்பைமட்டும் எடுத்துக் கொள்வோமாயின், $x = \dfrac{l(w_1 + \sqrt{w_1 w_2})}{w_1 - w_2}$

மாதிரிக் கணக்கு 6. ஒரு முனையில் உள்ள ஓர் அச்சைப் பற்றி இயங்கக்கூடியதும், 6 பவு. நிறையும் 4 அடி நீளமும் கொண்ட சீரான தண்டு ஒன்று செங்குத்தாகத் தொங்குகிறது.

அது ஒரு முறை சற்றே சுழலுமாறு அதன் அலைவு மையத்தில் கிடைமட்டமாகத் தாக்கப்படுகிறது. தாக்கின் அளவு $48\sqrt{3}$ பவு.—அடி/வி. என நிறுவுக.

படம் 10·18-ல் OA தண்டின் சமநிலையைக் குறிக்கிறது; G, புவியீர்ப்பு மையத்தையும் O, தொங்குதானத்தையும் C அலைவு மையத்தையும் குறிக்கின்றன. OA = 4'; OG = 2'; OC = L, இணைமாற்று இலகு ஊசலின் நீளம்.

ஊசல் தாக்கப்பட்டவுடன், அது பெறும் கோணத் திசைவேகம் w எனக் கொள்வோம்.

தாக்குதலுக்குட்பட்ட ஊசல் ஒரு முறை சற்றே சுழலவேண்டுமாயின் தாக்கப்பட்டவுடன் அது பெறும் இயக்க ஆற்றல் அதனை OB நிலைக்குச் சற்றே எடுத்துச்செல்லப் போதுமானதாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே தாக்கப்பட்ட கணத்தில் அதன் இயக்க ஆற்றல்

= OB நிலையில் அதன் நிலையாற்றல்

O-ஐப்பற்றிய ஊசலின் நிலைமத் திருப்பு திறன்

$\frac{1}{2}\,Iw^2 = mg \times GG_1$

அல்லது $\frac{1}{2}\,Iw^2 = 6 \times 32 \times 4$

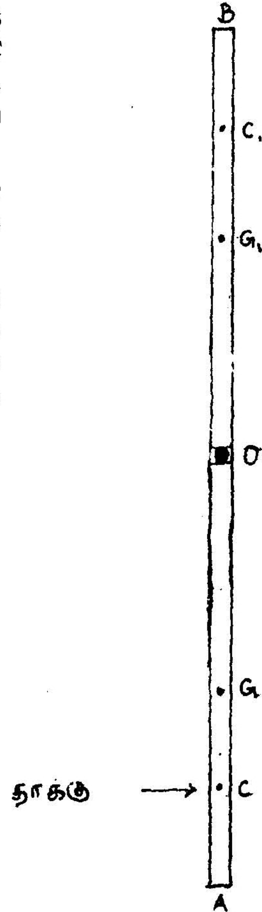
ஆனல், $I = mk^2 = m\,\frac{l^2}{3}$

$$= \frac{6 \times 16}{3} = 32 \text{ பவு-அடி}^2$$

$\therefore\ \frac{1}{2} \times 32 \times w^2 = 6 \times 32 \times 4$

அல்லது $w^2 = 48$

$\therefore\ w = 4\sqrt{3}$ ரேடியன்/வி.



படம் 10·18

மேலும் $OC = L = \frac{k^2}{h}$

ஆனல் $k^2 = \frac{16}{3}\ h = 2$

$$\therefore\ OC = \frac{16}{3 \times 2} = \frac{8}{3} \text{ அடி.}$$

இனி, தாக்குதலின்போது செயற்படும் விசை F எனவும் அது செயற்பட்ட நேரம் dt என்றும் கொள்வோமாயின், தாக்கு

$= Fdt.$

O-ஐப்பற்றிய இதன் திருப்புதிறன்

$= F.dt \times OC$

$= (F \times OC)\, dt$

= கோணத்தாக்கு.

ஆனால், கோணத்தாக்கு = கோணத்திசை வேகத்தில் ஏற்படும் மாறுதல்,

தண்டு தாக்கப்பட்டவுடன் பெறும் கோணத் திசை வேகம் w ஆதலால் அதன் கோணத் திசை வேகத்தில் ஏற்படும் மாறுதல்,

$= I\,w - O = I\,w$

$\therefore \quad F\,dt \times OC = I\,\mathbf{w}$

அல்லது. தாக்கு $F\,dt = \dfrac{I\,w}{OC}$

$= 32 \times 4\sqrt{3} \times \frac{3}{8}$

$= 48\sqrt{3}$ பவு - அடி/வி.

பயிற்சி X

1. ஒரு விநாடி ஊசல் அதன் நீளத்தில் $\frac{1}{100}$ பங்கு அதிகமாக்கப்படின், ஒரு நாளில் எவ்வளவு விநாடிகளை அது குறைந்துக் காட்டும். [432]

2. ஒரு விநாடி ஊசல் ஓர் இடத்தில் ஒரு நாளை 10 விநாடிகள் நீட்டித்தும், மற்றோர் இடத்தில் 10 விநாடிகள் குறைத்தும் காட்டுகிறது. அவ் விரு இடங்களின் g-யின் மதிப்புகளை ஒப்பு நோக்குக.

$\left[\dfrac{8643}{8639}\right]$

3. ஓர் அடி நீளமுள்ள ஒரு பித்தளை இரும்புத் தண்டு அதன் ஒரு முனையிலிருந்து 2 அங். தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு ஊசலாடுகிறது. அதன் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

$\left[\frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{7}{6}}\right.$ வி. $\left.\right]$

4. 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான தண்டு அதன் ஒரு முனையிலுள்ள வழவழப்பான கீலைப்பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அதன் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக. [$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{5}{8}\right)$ வி.]

5. ஒரு சீரான கனசதுரம் கிடைமட்டத்திலுள்ள அதன் விளிம்பைப்பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அதன் சமநிலையிலிருந்து அதனைச் சற்று அசைத்துவிடும்போது அது ஒரு வினாடியில் ஒரு அலையை ஆடி முடிக்கவேண்டுமாயின், அதன் விளிம்பைக் கணக்கிடுக. [$\frac{6\sqrt{2}}{\pi 2}$]

6. ஒரு கோளம் கிடைமட்டத் தொடுவரை ஒன்றைப்பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. கோளத்தின் ஆரம் r என்றால் இணை மாற்று இலகு ஊசலின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக. [$\frac{7}{5}r$]

7. ஒரு முனையிலுள்ள கிடைத்தள அச்சைப்பற்றி அலையும் போது, வினாடி ஊசலாகச் செயற்படக்கூடிய ஒரு சீரான தண்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக. [$\frac{4 \cdot 8}{\pi^2}$ அடி]

8. 100 கிராம் நிறையும் 120 செ.மீ நீளமும்கொண்ட AB என்ற ஒரு மெல்லிய சீரான தண்டு செங்குத்துத் தளத்தில், A-ஐப்பற்றி ஓர் ஊசலாக இயங்கக் கூடியதாயுள்ளது. தண்டுடன் A-லிருந்து x தொலைவில் 200 கி. நிறையொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அலைவு நேரம் சிறுமமாயிருக்க, x-ன் தொலைவைக் கணக்கிடுக. [$20\sqrt{6}$ செ.மீ]

9. செவ்வக வடிவிலுள்ள ஒரு மென்தகடு அதன் தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிப் புவியீர்ப்பு விசையின் செயலால் அலைகிறது. அலைவு நேரம் சிறுமமாயிருக்கும்போது இந்த அச்சு தகட்டின் நீளமான அச்சுக்கு இணையாக அதன் மையத்திலிருந்து $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ தொலைவில் இருக்கிறது என்று காட்டுக.

10. 4 வினாடி அலைவு நேரம்கொண்ட ஓர் உந்தவியல் [illegible] ஊசலில் 50 கி.கி நி[illegible] கட்டை [illegible]

விடப்பட்டுள்ளது. கட்டையின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகக் கிடைமட்டமாகச் சுடப்பட்ட 15 கி. நிறையுடைய ஒருகுண்டு கட்டையில் பொதிந்து ஊசலைச் செங்குத்து நிலையிலிருந்து 1° சாய்க்கிறது. குண்டின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக. [416·5 மீ/வி.]

11. ஓர் அடி ஆரமுள்ள சீரான வட்டத்தட்டு வடிவிலுள்ள 3 பவு. நிறையுள்ள ஒரு கண்டாமணி நிலையான கிடைத்தளத் தொடுவரை ஒன்றைப்பற்றித் தடங்கலின்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அது ஓய்விலிருக்கும்போது, 1[illegible] பவு-அடி/வி. அளவுள்ள தாக்கு ஒன்றினுல், அதன் மையத்தில் அதன் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகத் தாக்கப்படுகிறது. அது $40^{\circ}\ 24'$ கோணத்திற்குச் சுழலுகிறது எனக் காட்டுக.

11. பரிமாணங்கள்

(Dimensions)

அளவியல் என்ற பகுதியில் நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றின் அலகுகளை அடிப்படை அலகுகள் என்றும், மற்ற பௌதிகராசிகளின் அலகுகளை அடிப்படை அலகுகளிலிருந்து பெறலாம் என்றும் கண்டோம். திசைவேகம் இடப்பெயர்ச்சிக்கும் நேரத்திற்கும் உள்ள விகிதமாக அளவிடப்படுகிறது. அடர்த்தி பொருளின் நிறைக்கும் பருமனுக்கும் உள்ள விகிதமாக அளவிடப்படுகிறது. நீளம், நிறை காலம் அல்லது நேரத்தைக் முறையே, L, M, T என்ற குறியீடுகளால் குறிப்போமாயின், மேற்கூறப்பட்ட தொடர்புகளை

$$[\text{திசைவேகம்}] = \left[\frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{நேரம்}}\right] = [L\,T^{-1}]$$

$$[\text{அடர்த்தி}] = \left[\frac{\text{நிறை}}{\text{பருமன்}}\right] = \left[\frac{M}{L^3}\right][ML^{-3}]$$

மேற்கூறப்பட்ட தொடர்புகள் அடைப்புக் குறிகளுடன் எழுதப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். அச் சமன்பாடுகள் சாதாரண சமன்பாடுகள் அல்ல; ஆனால், திசைவேகம், அடர்த்தி போன்ற வழிவந்த பௌதிக ராசிகளின் நீளம், நிறை, நேரம் ஆகியவற்றின் அளவுகளை எவ்வாறு சார்ந்திருக்கின்றன என்பதையே குறிக்கின்றன. எனவேதான் அவை அடைப்புக் குறிகளுடன் எழுதப்பட்டுள்ளன.

எனவே, பொதுவாக, ஒரு பௌதிக ராசி (Q யை,

$$[Q] = [L^x\,M^y\,T^z]$$

என எழுதலாம். x, y, z என்பன மடிப் பெருக்க எண்கள் (powers) அவை நேர்க்குறியுடையனவாகவோ, எதிர்குறியுடையனவாகவோ பின்னமாகவோ இருக்கலாம்.

$[L^x M^y T^z]$ என்பது குறிப்பிட்ட பௌதிக ராசியின் பரிமாணங்கள் என அழைக்கப்படும். இதனையே குறிப்பிட்ட பௌதிக ராசியின் பரிமாணங்கள் நீளத்தில் x, நிறையில் y, நேரத்தில் z எனவும் கூறலாம்.

சில முக்கிய பௌதிக ராசிகளின் பரிமாணங்கள்

1. பரப்பளவு : *நீளம், அகலம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனால் நீளம் அளவிடப்படுவதால் பரப்பளவின் பரிமாணங்கள்* $[L^2]$ ஆகும்.

2. பருமன் : ஒரு பொருளின் பருமன் அதன் நீள, அகல உயரங்களின் பெருக்கற்பலனால் அளவிடப்படுகிறது. எனவே, பருமனின் பரிமாணங்கள் $[L^3]$ ஆகும்.

3. அடர்த்தி : அடர்த்தி $(p) = \frac{\text{நிறை}}{\text{பருமன்}}$

$$\text{எனவே,} \quad [P] = \left[\frac{M}{L^3}\right] = [ML^{-3}]$$

4. திசைவேகம் : திசைவேகம் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் பெறும் இடப்பெயர்ச்சி. அதாவது, திசைவேகம்

$$[v] = \left[\frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{நேரம்}}\right]$$

$$[v] = \left[\frac{L}{T}\right] = [LT^{-1}]$$

5. முடுக்கம் : முடுக்கம் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடு அதாவது முடுக்கம்.

$$[a] = \left[\frac{LT^{-1}}{T}\right] = [LT^{-2}]$$

6. உந்தம் : ஒரு பொருளின் உந்தமானது அதன் நிறை, திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனால் அளவிடப் படுகிறது.

அதாவது, உந்தம் (p) = நிறை × திசைவேகம்

$$[p] = [MLT^{-1}]$$

7. விசை : நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி

விசை $[F]$ = நிறை × முடுக்கம்

எனவே, $[F] = [MLT^{-2}]$

8. தாக்கு :

$$\text{தாக்கு} = \text{விசை} \times \text{நேரம்}$$

எனவே, $[\text{தாக்கு}] = [MLT^{-2}] \times [T]$

$$= [MLT^{-1}]$$

9. வேலை, ஆற்றல் :

வேலை அல்லது ஆற்றல் (W)

= விசை × விசைச் செயற்படுபுள்ளி நகரும் தொலைவு

எனவே, $[W] = [MLT^{-2}] \times L$

$$= [ML^2T^{-2}]$$

10. திறன் : திறன் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் செய்யப்பட்ட வேலை,

அதாவது, $\text{திறன் (p)} = \dfrac{\text{செய்யப்பட்டவேலை}}{\text{நேரம்}}$

$$[p] = \frac{[ML^2T^{-2}]}{T} = [ML^2T^{-3}]$$

11. கோணம்: கோணத்தை ரேடியனில் அளவிடும்போது,

$$\text{கோணம்}, (\theta) = \frac{\text{வட்டவில்}}{\text{ஆரம்}}$$

எனவே, $[\theta] = \left[\dfrac{L}{L}\right] = L^0$

கோணத்திற்கும் பரிமாணங்கள் கிடையாது.

12. கோணத்திசை வேகம்: ஓரலகு நேரத்தில் பொருள்பெறும் கோண இடப்பெயர்ச்சி அதன் கோணத்திசை வேகமாகும்.

அதாவது, $\text{கோணத்திசைவேகம்} \; [\omega] = \dfrac{\text{கோணம்}}{\text{நேரம்}}$

எனவே, $(\omega) = \left[\dfrac{L^0}{T}\right] = [T^{-1}]$

13. கோணமுடுக்கம் :

$$\text{கோணமுடுக்கம்} \; (\dot{\omega}) = \frac{\text{கோணத் திசைவேக மாறுபாடு}}{\text{நேரம்}}$$

எனவே, $(\dot{\omega}) = \left[\dfrac{T^{-1}}{T}\right] = [T^{-2}]$

14. நிலைமத் திருப்பு திறன்

நிலைமத் திருப்பு திறன் (I) = MK^2

எனவே, $[I] = [ML^2]$

15. கோண உந்தம் : ஒரு பொருளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன், கோணத் திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் கோண உந்தம் எனப்படும்.

அதாவது, கோண உந்தம் (h) = Iw

என்வே, $[h] = [ML^2T^{-1}]$

16. திருப்புவிசை :

திருப்புவிசை (C) = I·ὼ

எனவே, $[C] = [ML^2] \times T^{-2}$

$= [ML^2T^{-2}]$

17. யங் குணகம்

யங் குணகம் $[Q] = \frac{\text{தகைவு}}{\text{திரிபு}}$

$= \frac{\text{விசை/பரப்பளவு}}{\text{நீளமிகுதிப்பாடு/மூல நீளம்}}$

எனவே, $(Q) = \left[\frac{MLT^{-2}\ L^{2}}{L/L}\right]$

$= [ML^{-1}T^{-2}]$

18. அழுத்தம் :

அழுத்தம் என்பது ஓரலகு பரப்பளவில் செயற்படும் நேர்குத்து விசை.

அழுத்தம் (P) $= \frac{\text{விசை}}{\text{பரப்பளவு}}$

எனவே, $[P] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right] = [ML^{-1}T^{-2}$

19. பரப்பு இழுவிசை : பரப்பு இழுவிசை என்பது திரவத்தின் பரப்பில் ஓரலகு நீளத்தில் செயற்படும் விசை.

அதாவது, பரப்பு இழுவிசை (S) $= \frac{\text{விசை}}{\text{நீளம்}}$

$[S] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L}\right]$

$= [MT^{-2}]$

20. பாகியல் எண் (coefficient of viscosity)

$$\text{பாகியல் எண் } (\eta) = \frac{\text{ஓரலகு பரப்பளவில் தொடுவரை விசை}}{\text{திசைவேகப்பாட்டம்}}$$

$$= \frac{\text{விசை / பரப்பளவு}}{\text{திசைவேகம் / தொலைவு}}$$

$$\text{எனவே, } [\eta] = \frac{[MLT^{-2}/L^2]}{[LT^{-1}/L]}$$

$$[\eta] \equiv [ML^{-1}T^{-1}]$$

முக்கிய பௌதிக ராசிகளின் பரிமாணங்களின் அட்டவணை :

	பௌதிக ராசி	பரிமாணங்கள்
1.	பரப்பளவு	$[L^2]$
2.	பருமன்	$[L^3]$
3.	அடர்த்தி	$[ML^{-3}]$
4.	திசைவேகம்	$[LT^{-1}]$
5.	முடுக்கம்	$[LT^{-2}]$
6.	உந்தம்	$[MLT^{-1}]$
7.	விசை	$[MLT^{-2}]$
8.	தாக்கு	$[MLT^{-2}]$
9.	வேலை, ஆற்றல்	$[ML^2T^{-1}]$
10.	திறன்	$[ML^2T^{-3}]$
11.	கோணம்	$[L^0]$
12.	கோணத் திசைவேகம்	$[T^{-2}]$
13.	கோணமுடுக்கம்	$[T^{-2}]$
14.	நிலைமத் திருப்புதிறன்	$[ML^2]$
15.	கோண உந்தம்	$[ML^2T^{-1}]$
16.	திருப்புவிசை	$[ML^2T^{-2}]$
17.	யங் குணகம்	$[ML^{-1}T^{-2}]$
18.	அழுத்தம்	$[ML^{-1}T^{-2}]$
19.	பரப்பு இழுவிசை	$[MT^{-2}]$
20.	பாகியல் எண்	$[ML^{-1}T^{-1}]$

பரிமாணங்களின் பயன்கள்

பரிமாணங்கள் பல பௌதிக ராசிகளைத் தொடர்பு படுத்தும் சமன்பாடுகளின் அமைப்பைப் பெறுவதற்கும், அத் தொடர்புகளைச் சரிபார்ப்பதற்கும் ஓர் அளவீட்டு முறையிலுள்ள அலகுகளை மற்றோர் அளவீட்டுமுறைக்கு மாற்றுவதற்கும் பயன்படுகின்றன.

1. சமன்பாடுகளின் அமைப்பைப் பெறுதல் : காட்டாக, சிறு வீச்சுகளுடன் கூடிய இலகு ஊசலின் அலைவு நேரத்திற்கான சமன்பாட்டின் அமைப்பைப் பெறவேண்டி யிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

ஊசலின் அலைவு நேரம் வீச்சுகளைச் சார்பற்று இருக்கிறது எனக் கொள்வோமாயின், அது (i) ஊசல் குண்டின் நிறை (M), (ii) கயிற்றின் நீளம் (L), (iii) ஈர்ப்பு முடுக்கம் (ஊசலின் அலைவுகள் புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படுகின்றன) ஆகியவற்றைப் பொறுத்து அமைவதாகக் கொள்வோம்.

இனி, ஊசலின் அலைவு நேரத்திற்கான பரிமாணங்களைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்:

அலைவு நேரம் $= K \times (\text{நிறை})^x \times (\text{நீளம்})^y \times (\text{முடுக்கம்})^z$

K, x, y, z என்பன மாறிலிகள்.

அல்லது, $T = K \times M^x \times L^y \times (LT^{-2})^z$

அதாவது, $T = KM^x L^{(y+z)} T^{-2z}$

இருபுறமும் உள்ள ஒத்த ராசிகளின் மடிப்பெருக்க எண்களைச் சமன்படுத்துவோமாயின்,

$$x = 0;\ (y+z) = 0;\ 2z = -1$$

$$z = -\tfrac{1}{2} \qquad y = \tfrac{1}{2}$$

எனவே, $T = k l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$

அல்லது $T = K\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

K-ன் மதிப்பைப் பரிமாணங்களின் முறையில் காணமுடியாதாகையால், அதன் மதிப்பைச் சோதனைமுறையில் காணவேண்டும். அவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு 2π ஆகும்.

எனவே, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

2. பௌதிக ராசிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைச் சரிபார்த்தல் :

பௌதிக ராசிகளைத் தொடர்புப்படுத்தும் ஒரு சமன்பாட்டை எழுதினால், சமன்பாட்டின் இரு புறங்களிலும் பரிமாணங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும். இது பரிமாணங்களின் ஒரியல் தத்துவம் (principle of homogeneity of dimensions) எனப்படும்.

காட்டாக, $s = u + \frac{1}{2} at^2$

$s = ut + \frac{1}{2} at^2$

என்ற இரு சமன்பாடுகளில் எது சரியானது என்று பார்க்கவேண்டியிருப்பதாகக் கொள்வோம். முதல் சமன்பாட்டிற்கான பரிமாணங்களை எழுதுவோமாயின்,

$$[L] : [LT^{-1}] + [LT^{-2}][T^2]$$

எனவே, சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் பரிமாணங்கள் மிகவும் முரண்பட்டவையாயிருப்பதைக் காணலாம்.

இரண்டாவது சமன்பாட்டிற்கான பரிமாணங்களை எழுதுவோமாயின்,

$$[L] = [LT^{-1}T] + [LT^{-2}T^2]$$

$$[L] = [L] + [L] = 2[L]$$

இச் சமன்பாட்டில் இரு புறமும் பரிமாணங்கள் சமமாக இருக்கின்றனவாதலால், இரண்டாவது சமன்பாடே சரியானது. இம் முறையில் 2 என்னும் மாறிலி இங்குக் கருதப்படமாட்டாது.

3. ஒரு பௌதிக ராசியின் இரு அளவீட்டு முறைகளின் அலகுகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காணல்.

காட்டாக, திறனின் மெட்ரிக்முறையில் நடைமுறை அலகுக்கும் பிரிட்டன்முறையில் நடைமுறை அலகுக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காணவேண்டியிருப்பதாகக் கொள்வோம். மெட்ரிக்முறையில் திறனின் நடைமுறை அலகு வாட்; பிரிட்டன்முறையில் குதிரைத் திறன் சார்பிலா அலகுகளுக்கான பரிமாணங்களையே நாம் அறிவோமாதலாலும், இரு முறையிலும் நடைமுறை அலகுக்கும் சார்பிலா அலகுக்கும் உள்ள விகிதங்கள் வெவ்வேறாக இருப்பதாலும் முதலில் நடைமுறை அலகுகளைச் சார்பிலா அலகுகளாக மாற்றிக் கொள்கிறோம்.

மெட்ரிக்முறையில் திறனின் சார்பிலா அலகு P என்றும் பிரிட்டன்முறையில் P_1 என்றும் மெட்ரிக்முறையில் அடிப்படை அலகுகளை L, M, T என்றும் பிரிட்டன்முறையில் L_1, M_1, T_1 என்றும் கொள்வோம்.

$$\frac{\text{ஒரு வாட்}}{\text{ஒரு குதிரைத்திறன்}} = \frac{10^7 \text{ எர்குகள்/வி.}}{550 \text{ அடி. டவுண்டுகள்/வி}}$$

$$= \frac{10^7 \text{ எர்குகள்/வி.}}{550 \times 32 \text{ அடி. பவுண்டல்கள்/வி.}}$$

$$\therefore \quad \frac{1 \text{ வாட்}}{1 \text{ குதிரைத்திறன்}} = \frac{10^7}{550 \times 32} \times \frac{P}{P_1}$$

ஆனல், $[P] = [ML^2T^{-3}]$

$[P_1] = [M_1L_1^2T_1^{-3}]$

$$\therefore \quad \frac{1 \text{ வாட்}}{1 \text{ குதிரைத்திறன}} = \frac{10^7}{550 \times 32} \times \left[\frac{M}{M_1}\right] \times \left[\frac{L}{L_1}\right]^2 \times \left[\frac{T}{T_1}\right]^{-3}$$

ஆனல், $\frac{M}{M_1} = \frac{1 \text{ கிராம்}}{1 \text{ பவு.}} = \frac{1}{453\cdot6}$

$\frac{L}{L_1} = \frac{1 \text{ செ. மீ.}}{1 \text{ அடி}} = \frac{1}{30\cdot48}$

$\frac{T}{T_1} = \frac{1 \text{ வி.}}{1 \text{ வி.}} = 1.$

$$\therefore \quad \frac{1 \text{ வாட்}}{1 \text{ குதிரைத்திறன்}} = \frac{10^7}{550 \times 32} \times \frac{1}{453\cdot6} \times \left(\frac{1}{30\cdot48}\right)^2 \times 1$$

$$= 0\cdot00135$$

எனவே, 1 வாட் $= 0\cdot00135$ குதிரைத்திறன்

அல்லது 1 குதிரைத்திறன் $= 741\cdot5$ வாட்டுகள்.

பயிற்சி XI

1. ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலக்கூடிய திண்பொருளின் இயக்க ஆற்றல் அதன் (i) நிலைமத் திருப்பு திறன், (ii) கோணத் திசைவேகம் ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. அவற்றிற்கிடையே யுள்ள தொடர்பைப் பெறுக.

2. பரிமாணங்களின் முறையில், r என்ற ஆரத்தையுடைய வட்டத்தில் v என்ற சீரான வேகத்துடன் இயங்கும் முடுக்கத்தின் மதிப்பு $\frac{v^2}{r}$ எனக் காட்டுக.

3. புவியீர்ப்பு விசையைச் சார்ந்திராத கோளவடிவ திரவத் துளி ஒன்றின் அலைவு நேரம் (i) திரவத்தின் பரப்பு இழுவிசை, (ii) துளியின் ஆரம், (iii) திரவத்தின் அடர்த்தி ஆகியவற்றைச் சார்ந்திருக்கலாமெனக் கருதப்படுகிறது. பரிமாணங்களின் முறையைப் பயன்படுத்தி அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பைப் பெறுக.

$$\left[K\sqrt{\frac{Pr^3}{s}}\right]$$

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

சென்னை-9

1969 ஜனவரிவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.பை.
*1.	பொருளாதாரம்-II	சி. வேலாயுதம்	9—00
2.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12—00
3.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்-I	தி. சி. மோகன்	12—00
4.	,, ,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10—75
5.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7—00
*6.	பணவியலும் பாங்கியலும்—II	சி. வேலாயுதம்	11—50
7.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	7—50
*8.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5—50
*9.	அரசாங்க நிதியியல்	அர. சேஷாசலம்	4—75
10.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியம்	10—00
11.	,, II	எம். லூர்து நாதன்	4—25
12.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10—75
13.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10—50

*மூலநூல் (Original Book)

14.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6—00
15.	,, ,, —II	,,	6—00
16.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5—00
17.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11—00
18.	,, ,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6—00
19.	,, ,, II	,,	6—50
20.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10—00
21.	,, ,, II	அர. சேஷாசலம்	9—50
22.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10—00
23.	,, ,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8—00
24.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10—00
•25.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9—50
26.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11—00
27.	பெண்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11—00
28.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7—00
•29.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6—00
30.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7—50
31.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9—00
32.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7—75
33.	,, ,, II	,,	7—00
34.	வளர்ச்சியுருத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4—25
35.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5—50
36.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி, சுந்தரராஜன்	7—50
37.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7—75

38.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857-1956)—I	... ம. திருநாவுக்கரசு	... 7—00
39.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	... பு. வி. சீனிவாசன்	... 6—25

வரலாறு

*40.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	... கி. ர. அனுமந்தன்	... 10—00
*41.	,, ,, II	... ,,	... 9—75
*42.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	... டி. வி. சொக்கப்பா	... 4—50
43.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம்	... வை. விருத்தகிரீசன்	... 15—00
44.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	... இரா. அண்ணாமலை	... 13—00
45.	,, ,, II	... பா. மாணிக்கவேலு	... 13—00
46.	,, ,, III	... என். ஜே. ராஜகோபால்	... 8—00
47.	,, ,, IV	... ,,	... 8—00
48.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	... க. த. திருநாவுக்கரசு	... 15—00
49.	,, ,, II	... எம். எஸ். மிராண்டா	... 8—00
50.	,, ,, III	... ,,	... 5—00
51.	*இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	... தி. வெ. குப்புசாமி	... 7—50
52.	,, ,, II	... ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	... 9—00
53.	,, ,, III	... அ. பாண்டுரங்கன்	... 11—00
54.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	... சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கிய நாதன்	... 7—50
55.	,, ,, II	... ,,	... 7—00
56.	,, ,, III	... பி. இராமானுஜம் தேவதாஸ்	... 7—75
57.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	... தி. வெ. குப்புசாமி	... 8—25
58.	,, ,, II	... ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	... 7—50
59.	,, ,, III	... க. த. திருநாவுக்கரசு	... 10—50

*மூலநூல் (Original Book)

60.	முகலாயப் பேரரசு—I	... ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7—50
61.	,, II	... எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7—75
62.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	... வை. விருத்தகிரீசன் ...	7—50
63.	,, II	... வை விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை ...	6—75
64.	,, III	... இரா அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு ...	6—50
		பா. மாணிக்கவேலு ...	7—00
65.	,, IV	... சி. சு. இராமச்சந்திரன் ...	6—50
66.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	... சி. சு. இராமச்சந்திரன் ...	6—75
67.	,, II	... இர. ஆலாலசுந்தரம்	
68.	,, III	... ஆர். ஆலாலசுந்தரம் ...	6—50
69.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	... பா. மாணிக்கவேலு ...	5—00
70.	,, II	... ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப் ...	6—00

அரசியல்

*71.	இந்திய அரசியலமைப்பு	... வீ. கண்ணையா ...	4—75
72.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	... டி செல்லப்பா ...	8—50
73.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	... மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு ...	8—50
74.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	... திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா ...	16—00
75.	,, ,, II	... ,, ...	13—25
76.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	... வீ. கண்ணையா ...	9—00
77.	,, ,, II	... அ. ஜெகதீசன் ...	7—25
78.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... வீ. கண்ணையா ...	7—50
79.	,, II	... டி. செல்லப்பா ...	7—50
80.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	... தி. வெ. குப்புசாமி எஸ். சுப்பிரமணியன் ...	9—25
81.	இந்திய ஆட்சி அமைப்பு முறை வளர்ச்சி—I	... வீ. கண்ணையா ...	6—25
82.	,, ,, II	... வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன் ...	5—75
83.	,, ,, III	... கி. ர. அனுமந்தன் ...	

*84.	மக்கள் ஆட்சி		க. சந்தானம்	4—25
85.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்		என். ஜே. ராஜகோபால்	7—75
86.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்		மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7—00
87.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்	I	பா. சூரியநாராயணன்	5—75
88.	,, ,,	II	பா. சூரியநாராயணன், கி ர. அனுமந்தன்	6—00
89.	,, ,,	III	கி. ர. அனுமந்தன்	5—75

உளவியல்

90.	குழந்தை உளவியல்—I	கி ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8—00
91.	,, ,, II	,,	7—00
92.	உட்கவர் மனம்	சி. ந வைத்தீஸ்வரன்	7—00
93.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12—00
94.	,, ,, II	,,	9—00
95.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9—25
96.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசென்ட் கிரிப்பர்ராஜ்	11—00
97.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3—00
*98.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6—25

தத்துவம்

99.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ரா. ராஜாபகதூர்	5—50
*100.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3—50

*மூலநூல் (Original book)

*101.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3—50
102.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6—50
103.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5—50
104.	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனபதி, ப. நா. சண்முகசுந்தரம்	3—50
105.	,, II	,,	6—00
106.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6—00

அறவியல்

107.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8—50

அளவையியல்

108.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2—50

மானிடவியல்

*109.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4—75
110.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	5—50
111.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3—50

சமூகவியல்

112.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10—00

புவியியல்

113.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9—50
114.	,, II	,,	8—75
115.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8—50
*116.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8—50

புவியியல் (தொடர்ச்சி)

*117.	வட அமெரிக்கா	...	குமாரி இரா. அலமேலு	...	8—25
*118.	தென் அமெரிக்கா	...	எம். என். பத்மநாபன்	...	9—00
*119.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	...	திருமதி எச். நியூமன்	...	4—00
*120.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	...	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	...	3—25
*121.	புவிப்புறவியல்-II	...	நா. அனந்தபத்மநாபன்	...	6—00
*122.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	...	9—00
*123.	மக்கட் பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	...	6—25
*124.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி	...	6—50
125.	காலநிலை இயல்-I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	10—00
116.	,, II	...	,,	...	5—00
127.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி	...	11—00
128.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விஸ்வநாதன்	...	4—75
129.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	...	கோ. இராமசாமி	...	6—00
130.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்-I	...	எஸ். மாணிக்கம்	...	9—50
131.	,, II	...	எம். கார்த்திகேயன்	...	12—00
132.	,, III	...	சி. எஸ். நரசிம்மன்		

புள்ளியியல்

*133.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	...	சு. வைத்தியநாதன்	...	10—00
134.	புள்ளியியல் முறைகள்-I	...	கோ. சண்முகசுந்தரம்	...	10—00
135.	,, II	...	இராஜகோபாலன்	...	14—00
136.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	...	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	...	6—50

உயர்கணிதம்

*137.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	...	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	...	12—50
*138.	வகை நுண்கணிதம்		,,	...	8—00

*மூலநூல் (Original Book)

*139.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	9—00

விலங்கியல்

*140.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	12—00

பௌதிகவியல்

141.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10—00

விஞ்ஞானம்

*142.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6—00
*143.	ரேடியோ	,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	4—75
*144.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4—50
*145	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணாமலை	8—50
*146.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8—00
*147.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4—00
*148.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6—50

மருத்துவம்

*149.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி வேங்கடசாமி டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2—50
150.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8—25
*151.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2—50
152.	புற்று நோய்	அ. கதிரேசன்	3—50
153.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி. எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது.	6—75
154.	,, II	,,	5—50
155.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7—25

பொறியியல்

156.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	... கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே வேணுகோபால்	... 8 - 50

கூட்டுறவு

157	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	... அ. வேல்மணி	...

சட்டம்

*158.	குற்றவியல் சட்டம்	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10—00

பொது நூல்கள்

159.	மகாத்மா காந்தி	... சரஸ்வதி தங்கையன்	... 3—25
160.	விவசாயப் புரட்சி	... வி. கார்த்திகேயன்	... 8—00
*161.	சேமக் கை-நூல்	... அ. சுப்பிரமணியம்	... 2—50
*162.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	... எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	... 9—00
*163.	உணவும் ஊட்டமும்	... தி. வேங்கடகிருஷ்ணய்யங்கார்	... 4—50

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை (P.U.C.)

*164.	உலக வரலாறு	... டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	... 4—00
*165.	பொருளாதாரம்	... ஜி. சிதம்பரம்	... 3—50
*166.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... கு. ஆளுடைய பிள்ளை	... 4—00
*167.	,, II	,,	... 3—50

*மூலநூல் (Original Book)

*168.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7—50
*169.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5—75
*170.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7—00
*171.	,, II	,,	3—00
*172.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7—00
*173.	,, II	,,	4—50
*174.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4—75
*175.	,, II	,,	3—25
*176.	வேதியியல்	டி. முனியப்பன், ஆர். முத்துலட்சுமி	7—00
*177.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5—50
*178.	விலங்கியல்	எஸ் ஆப்ரகாம்	4—00
*179.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை	7—25
*180.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4—50

* மூலநூல் (Original Book)